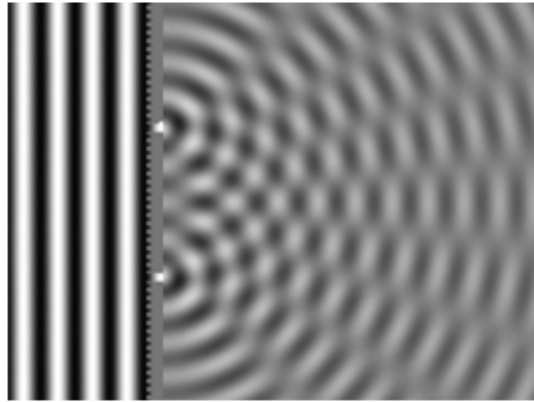


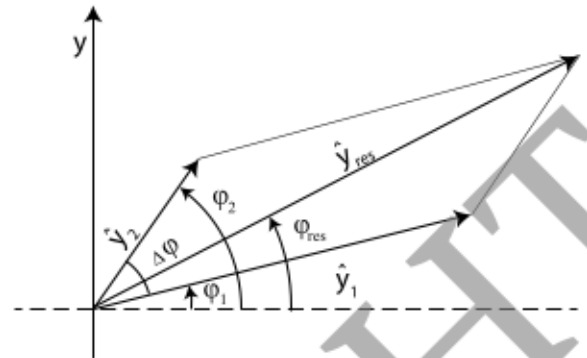
## Das Zeigermodell – Grundlagen und Rechenbeispiele

Axel Donges, Isny im Allgäu

<http://www.itp.uni-hannover.de/~zawitscha/index.html>  
(Farbenlehre II, Vielstrahlinterferenz)



**Beugung am Doppelspalt:** Von links läuft eine ebene Welle auf eine absorbierende Blende mit zwei kleinen Öffnungen (Spalten) zu. Man sieht, wie sich in den rechts auslaufenden Wellen konstruktive und destruktive Interferenz abwechseln.



**Überlagerung zweier Wellen im Zeigermodell:** Diese Darstellung gilt für einen bestimmten Ort  $x$  zu einer bestimmten Zeit  $t$ . Die Projektionen der zwei Teilwellen auf die  $y$ -Achse sind zusammen so lang wie die Projektion des resultierenden Zeigers.

II/D

Interferenzphänomene spielen in vielen Bereichen der Physik (z. B. Akustik, Optik, Quantenphysik) und Technik eine wichtige Rolle. Die Superposition von Wellen lässt sich besonders einfach und anschaulich im sogenannten *Zeigermodell* beschreiben und berechnen. Durch grafische Vektoraddition ist es sogar möglich, komplexe Superpositionsprobleme ohne mathematisches Rüstzeug zu lösen. Diese Unterrichtseinheit stellt die Grundlagen des Zeigermodells kurz und übersichtlich dar. Danach wird das erläuterte Modell auf verschiedene Interferenzphänomene angewendet.

**Doppelspalt-Experiment  
einmal anders!**

### Der Beitrag im Überblick

**Klasse:** 11/12

**Dauer:** 12–14 Stunden

**Ihr Plus:**

- ✓ Komplexe Interferenzphänomene – übersichtlich grafisch veranschaulicht
- ✓ Eine mathematische Beschreibung der Interferenz

**Inhalt:**

- Grundlagen des Zeigermodells
- Superpositionsprinzip
- Stehende Welle
- Schwebung
- Beugung am Einzelspalt, Doppelspalt und Gitter
- Fermat'sches Prinzip

**Materialübersicht**

⌚ V = Vorbereitungszeit    SV = Schülerversuch    Ab = Arbeitsblatt/Informationsblatt  
 ⌚ D = Durchführungszeit    LV = Lehrerversuch    Fo = Folie

|             |               |                                                                      |
|-------------|---------------|----------------------------------------------------------------------|
| <b>M 1</b>  | <b>Ab</b>     | <b>Die harmonische Welle – mathematische Beschreibung</b>            |
|             | ⌚ D: 90 min   |                                                                      |
| <b>M 2</b>  | <b>Ab, LV</b> | <b>Die Projektion einer Kreisbewegung – das Zeigermodell</b>         |
|             | ⌚ V: 10 min   | <input type="checkbox"/> Federpendel                                 |
|             | ⌚ D: 80 min   | <input type="checkbox"/> Elektromotor mit rotierendem Körper         |
|             |               | <input type="checkbox"/> Scheinwerfer                                |
| <b>M 3</b>  | <b>Ab</b>     | <b>1 + 1 = 0? – Das Superpositionsprinzip</b>                        |
|             | ⌚ D: 90 min   |                                                                      |
| <b>M 4</b>  | <b>Ab</b>     | <b>Überlagerung zweier gegenläufiger Wellen – die stehende Welle</b> |
|             | ⌚ D: 45 min   |                                                                      |
| <b>M 5</b>  | <b>Ab, SV</b> | <b>Wie stimmen Sie eine Gitarre? – Die Schwebung</b>                 |
|             | ⌚ V: 10 min   | <input type="checkbox"/> 2 Lautsprecher                              |
|             | ⌚ D: 80 min   | <input type="checkbox"/> 2 Funktionsgeneratoren                      |
|             |               | <input type="checkbox"/> Mikrofon                                    |
|             |               | <input type="checkbox"/> Oszilloskop                                 |
|             |               | <input type="checkbox"/> Stimmgabel ( $f = 440 \text{ Hz}$ )         |
|             |               | <input type="checkbox"/> klassische Gitarre                          |
| <b>M 6</b>  | <b>Ab</b>     | <b>Das Huygens'sche Prinzip</b>                                      |
|             | ⌚ D: 15 min   |                                                                      |
| <b>M 7</b>  | <b>Ab, SV</b> | <b>Superposition zweier Wellen – Beugung am Doppelspalt</b>          |
|             | ⌚ V: 10 min   | <input type="checkbox"/> Straßenmessrad (alternativ Fahrrad)         |
|             | ⌚ D: 80 min   | <input type="checkbox"/> Kreide                                      |
| <b>M 8</b>  | <b>Ab</b>     | <b>Mehr als zwei Spalte – Beugung am Gitter</b>                      |
|             | ⌚ D: 45 min   |                                                                      |
| <b>M 9</b>  | <b>Ab</b>     | <b>Das Fermat'sche Prinzip</b>                                       |
|             | ⌚ D: 45 min   |                                                                      |
| <b>M 10</b> | <b>Ab</b>     | <b>Beugung am Einzelspalt</b>                                        |
|             | ⌚ D: 45 min   |                                                                      |

**Die Erläuterungen und Lösungen zu den Materialien finden Sie ab Seite 36.**

**Minimalplan**

Die Schüler bearbeiten die Materialien **M 1–M 3** als Hausaufgabe. Eine Schulstunde nutzen Sie, um Unklarheiten bezüglich des Stoffs dieser Materialien zu klären. Danach beschränken Sie sich auf das Huygens'sche Prinzip (**M 6**) und die Beugung am Doppelspalt (**M 7**) bzw. Gitter (**M 8**).

**Aufgaben**

- 1.1 Berechnen Sie für eine harmonische Welle mit  $\hat{y} = 1$ ,  $T = 3,5$  s,  $\lambda = 6,0$  cm und  $\varphi_0 = 2,0$  die Auslenkung  $y$  zur Zeit  $t = 10$  s am Ort  $x = 74$  cm.  
Welche Ausbreitungsgeschwindigkeit  $c$  besitzt diese Welle?
- 1.2 Welchen Gangunterschied haben zwei harmonische Wellen, die die Startphasenwinkel  $\pi/4$  bzw.  $\pi/3$  besitzen, aber ansonsten identisch sind?  
Die Wellenlänge beträgt jeweils  $\lambda = 10$  cm.
- 1.3 Geben Sie den Winkel  $\varphi = \pi/6$  in Grad an.
- 1.4 Skizzieren Sie die Welle (1.5) mit  $\hat{y} = 1,0$ ,  $T = 4,0$  s,  $\lambda = 6,0$  cm und  $\varphi_0 = 0$  zu zwei verschiedenen Zeitpunkten  $t_1 = 0$  s,  $t_2 = 1,0$  s. Überzeugen Sie sich, dass die Welle tatsächlich in negative  $x$ -Richtung läuft.
- 1.5 Welchen Einfluss hat der Startphasenwinkel  $\varphi_0$  auf die in  $-x$ -Richtung laufende Welle (1.5)?
- 1.6 Auf einem Wellenträger breitet sich eine harmonische Welle aus.  
Am Ort  $x = 0$  und zur Zeit  $t = 0$  beträgt die Auslenkung  $5,0$  cm bei abnehmender Tendenz. Die Amplitude beträgt  $10$  cm.  
Bestimmen Sie den Startphasenwinkel  $\varphi_0$ .
- 1.7 Welche Wellenlänge hat eine Welle, die eine Periodendauer von  $1,0$  ms hat und deren Ausbreitungsgeschwindigkeit  $100$  m/s beträgt?

**Interpretation der Wellengleichungen**

Die harmonischen Wellen (1.1) und (1.5) lassen sich auch in der Form

$$y(t, x) = \hat{y} \sin\left(\frac{2\pi}{T}t + \phi(x)\right) \quad \text{mit} \quad \phi(x) = \pm \frac{2\pi}{\lambda}x + \varphi_0 \quad (1.6)$$

zusammenfassen (negatives Vorzeichen bei Ausbreitung in positive  $x$ -Richtung, positives Vorzeichen bei Ausbreitung in negative  $x$ -Richtung).

Diese Schreibweise legt die folgende Interpretation nahe:

Jeder Punkt  $x$  eines Wellenträgers führt eine harmonische Schwingung mit der Amplitude  $\hat{y}$  und der Periodendauer  $T$  aus. Die Schwingungen an verschiedenen Orten  $x$  sind jedoch zueinander phasenverschoben (siehe Abb. 1.3–1.4).

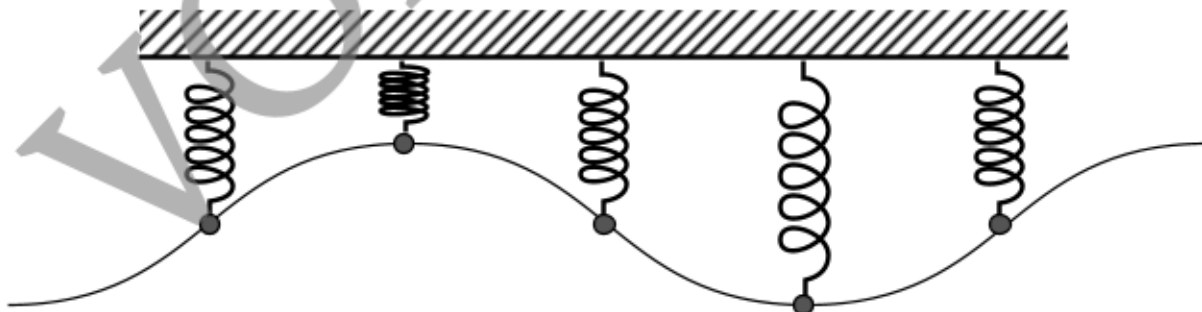


Abb. 1.3: Identische Federpendel, die mit gleichen Amplituden und Periodendauern in definierter Weise zueinander phasenverschoben schwingen, bilden eine harmonische „Federpendelwelle“.

### Das Straßenmessrad als Eselsbrücke

Wir können uns merken:

Die verschiedenen Zeigerstellungen (in einem x-y-Diagramm zu einem bestimmten Zeitpunkt  $t$ ) einer in Vorwärtsrichtung laufenden Welle (Abb. 2.3) stimmen mit der Zeigerstellung eines sogenannten *Straßenmessrades* (siehe Abb. 2.5) überein,

- sofern es längs des Weges der Welle abgerollt wird,
- der Radumfang der Wellenlänge der Welle entspricht ( $U = 2\pi R = \lambda$ ) und
- der Startwinkel des Rades mit dem Startphasenwinkel der Welle übereinstimmt.



Abb. 2.5: Straßenmessrad mit Zeiger

Das Straßenmessrad wandelt also eine Wegstrecke direkt in einen Phasenwinkel um:

$$\varphi(t, x) = \varphi(t, x = 0) - \frac{x}{R} \quad (2.2)$$

### Aufgaben

- 2.1 Welchen räumlichen Abstand haben zwei Zeiger einer harmonischen Welle, die zur gleichen Zeit die gleiche Richtung haben?
- 2.2 Wie unterscheiden sich die Zeiger zweier Wellen am selben Ort und zur gleichen Zeit, wenn die Wellen einen Gangunterschied von einer halben Wellenlänge haben?
- 2.3 Zeichnen Sie für die in positive x-Richtung laufende harmonische Welle mit  $\hat{y} = 3,0 \text{ cm}$ ,  $T = 2,0 \text{ s}$ ,  $\lambda = 5,0 \text{ cm}$  und  $\varphi_0 = 2,0$  den Zeiger zur Zeit  $t = 4,0 \text{ s}$  am Ort  $x = 2,5 \text{ cm}$ .
- 2.4 Mit einem am Ort  $x = 0$  harmonisch schwingenden Erreger wird eine Querwelle erregt. Der Erreger beginnt seine Bewegung zur Zeit  $t = 0 \text{ s}$  im Nulldurchgang ( $y = 0 \text{ cm}$ ) mit einer Abwärtsbewegung (negative y-Richtung). Die Periodendauer beträgt  $0,5 \text{ s}$ , die Amplitude  $10 \text{ cm}$ . Die Welle breitet sich mit einer Ausbreitungsgeschwindigkeit von  $3,0 \text{ cm/s}$  in positive x-Richtung aus. Am Ort  $x = 2,25 \text{ cm}$  wird sie mit einem Phasensprung von  $\pi$  reflektiert.

Skizzieren Sie die hin- und rücklaufende Welle zum Zeitpunkt  $t = 1,25 \text{ s}$ . Zeichnen Sie Zeiger für die hin- und rücklaufende Welle ein.

II/D