Schrödingers Atommodell – Grundlagen der Quantenphysik

Dr. Johannes Günther, Karlstadt

In der Zeit von 1920 bis 1930 veränderten die Arbeiten zweier Physiker die Vorstellungen der Physik grundlegend, Louis de Broglie und Erwin Schrödinger.

Louis de Broglie (1892–1987)

Foto: Süddeutsche Zeitung

In seiner Doktorarbeit[1] stellte de Broglie 1924 die kühne These auf, dass der Welle-Teilchen-Dualismus der Photonen auch für massebehaftete Teilchen wie Elektronen oder Protonen gelten solle. Der Promotionsprüfungsausschuss der Pariser Universität Sorbonne war sich mit der Bewertung dieser Arbeit so unsicher, dass er ein Exemplar an Albert Einstein sandte, der wiederum Max Born, Max Planck und andere über de Broglies Ideen informierte.

So machte de Broglies Postulat der Materiewellen unter den führenden Physikern der damaligen Zeit schnell die Runde.

Bereits zwei Jahre später veröffentlichte Erwin Schrödinger seine berühmte Gleichung[2], die das Verhalten der Materiewellen in einem gegebenen Potenzial beschreibt. 1929 wurde de Broglie und 1933 Schrödinger für seine Arbeit mit dem Nobelpreis ausgezeichnet.

Erwin Schrödinger (1887–1961)

Foto: picture-alliance/dpa

Zeigen Sie Ihren Schülern Schritt für Schritt diese faszinierende Entwicklung auf. Ihre Schüler bekommen so Einblick in die mathematische Welt der Quantenphysik. Sie erlangen dabei ein grundlegendes Verständnis für die Vorgehensweisen der theoretischen Physik.

Wischer: Eine schrittweise Hinführung zur Schrödingergleichung!

Der Beitrag im Überblick	
Klasse: 12 (G8) **Dauer:** 8–10 Stunden **Ihr Plus:** ✓ Anregung für Diskussionen über die Quantenphysik	**Inhalt:** • Das Linienspektrum des H-Atoms • Die De-Broglie-Wellenlänge • Das Bohr'sche Atommodell • Quantisierung im Potenzialtopf • Schrödingergleichung

1 L. de Broglie: Recherches sur la théorie des quanta. Dissertation. Masson & Cie, Paris 1924; Ann. Phys. 3 (1925), 22–128.

2 E. Schrödinger: Quantisierung als Eigenwertproblem. Mitteilungsreihe in den Annalen der Physik: Ann. Phys. 79, 361 (1926); Ann. Phys. 79, 489 (1926); Ann. Phys. 80, 437 (1926); Ann. Phys. 81, 109 (1926).

Mithilfe von **M 3** setzen sich Ihre Schüler mit den Rechnungen zum Bohr'schen Atommodell auseinander. Für die Schüler ist es faszinierend, dass ein einfacher, mit dem Wissen der klassischen Mechanik nachvollziehbarer Kräfteansatz die richtigen Werte für die Wellenlängen der Spektrallinien liefert. Ihre Schüler erkennen, dass „erklären" hierbei bedeutet, die zunächst kompliziert erscheinenden experimentellen Befunde auf einfache, theoretische Annahmen zurückzuführen. Durch Diskussion vermitteln Sie Ihrer Lerngruppe einen Einblick in die Vorgehensweise der theoretischen Physik. Zeigen Sie am Ende auch die Grenzen des Bohr'schen Modells auf. So motivieren Sie die Erweiterung des Atommodells auf die Wahrscheinlichkeitsdeutung der Schrödingergleichung.

Für die weiteren Materialien sind Grundkenntnisse im Umgang mit **Potenzialdiagrammen** notwendig. Daher wird die Bedeutung dieser Diagrammart in **M 4** erklärt und an einem fiktiven Beispiel eingeübt. In **M 5** übertragen Ihre Schüler dann ihr Wissen auf das Potenzial des Wasserstoffatoms. Helfen Sie Ihren Schülern dabei. Die Darstellung der Energie über dem Ort ist ungewohnt. Diskutieren Sie mit Ihrer Lerngruppe die drei Energiearten E_g, E_{kin} und E_{pot}. Sprechen Sie darüber, warum E_g eine horizontale Linie ist, also nicht vom Ort abhängt, und warum diese Größe für das jeweilige System kennzeichnend ist. Gehen Sie noch einmal auf das Prinzip der Energieerhaltung ein und nehmen Sie sich Zeit für die Fragen der Schüler. Ein sicherer und kompetenter Umgang mit dieser Diagrammart ist Voraussetzung für die Bearbeitung der weiteren Materialien.

II/E

Bevor die Schüler mit **M 6** weiterarbeiten können, müssen Sie Ihrer Lerngruppe den **statistischen Charakter der Aufenthaltswahrscheinlichkeit** vermitteln. Diskutieren Sie diesen z. B. anhand des Doppelspaltexperiments oder des Quantenradierers. Die Raabits-Materialien **II/E/Reihe 3** geben hierfür Anregungen. Führen Sie $\Psi(x)$ als Funktion ein, die das wellenhafte Verhalten der Quantenobjekte beschreibt. Um $\Psi(x)$ zu ermitteln, muss über einen bestimmten Raumbereich integriert werden. Allerdings kann $\Psi(x)$ als Auslenkung einer Welle auch negative Werte annehmen. Für die Beschreibung einer Wahrscheinlichkeit ist diese Funktion somit nicht geeignet. Dies wird erst durch das stets positive Betragsquadrat $|\Psi(x)|^2$ erreicht, welches man als Aufenthaltswahrscheinlichkeit des Quantenobjektes am Ort x interpretiert. Sie können auch anmerken, dass das Integral $|\Psi(x)|^2$ über alle Werte von x eins ergeben muss, da die Wahrscheinlichkeit, dass sich das Teilchen irgendwo im Raum aufhält, gleich eins ist.

M 6 stellt das Modell des **Potenzialtopfes** vor. Zur Motivation ist auf dem Arbeitsblatt ein Schaf in seinem Pferch gezeichnet. Es soll das Elektron im Potenzialtopf symbolisieren, das eine bestimmte Energie bräuchte, um den Zaun zu durchbrechen. Im unendlich tiefen Topf ist die dazu benötigte kinetische Energie ebenfalls unendlich. Lassen Sie Ihre Schüler zunächst die ersten drei Absätze lesen und diskutieren Sie dann gemeinsam die Modellvorstellung.

M 7 dient der Vorbereitung der **Schrödingergleichung** als **Differenzialgleichung**. Lassen Sie einen Schüler als Einleitung ein Referat über den in der Mathematik sicher schon behandelten Differenzialquotienten halten. Auch hier sollten Ihre Schüler zunächst den Text vor den Aufgaben lesen und in eine eigene Heftmitschrift umsetzen. Gehen Sie durch die Klasse und beantworten Sie Fragen. Wiederholen Sie gegebenenfalls das Hooke'sche Gesetz mit einem kleinen Freihandversuch mit Feder und Federkraftmesser. Diskutieren Sie mit Ihrer Lerngruppe die Bedeutung von Differenzialgleichungen für die Physik und zeigen Sie den Umgang mit diesen besonderen Gleichungen auf. Dabei steht nicht das Vermitteln mathematischer Fähigkeiten im Vordergrund, sondern die Erkenntnis, dass die Physik vom Verhalten veränderlicher Größen geprägt wird und man diese mit Differenzialgleichungen beschreiben kann.

M 8 führt zur Schrödingergleichung hin. Lassen Sie die Schüler vorab die zentralen Aussagen von **M 5** und **M 6** zusammenfassen. Weisen Sie auf den Unterschied zwischen Orts- und Zeitableitung hin. Wiederholen Sie die Bedeutung von de Broglies Materiewelle $\Psi(x)$. Die Schrödingergleichung ist grundlegend für die Quantenmechanik.

M 1 Das Wasserstoffspektrum – die Balmerserie bestimmen

Lehrerversuch/Schülerversuch Vorbereitung: 10 min Durchführung: 30 min

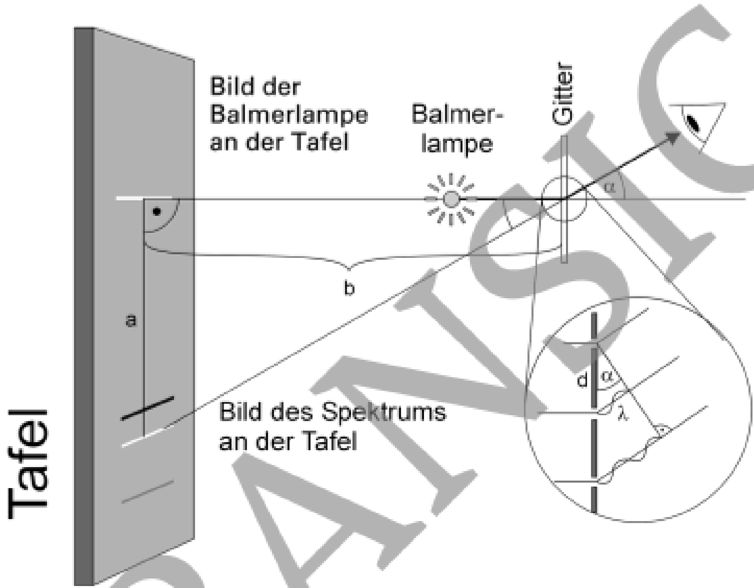
Materialien	
❐ Balmerlampe	❐ Maßband oder Tafellineal
❐ Gitter mit 600–1000 Linien/mm	❐ Farbkreide

Ziel des Versuches

Bestimmen Sie die Wellenlängen der **Balmerserie** des Wasserstoffatoms.

Versuchsaufbau

Balmerlampe und Gitter werden so auf dem Pult aufgebaut, dass die Gerade vom Gitter zur Lampe senkrecht zur Tafelebene steht.



Versuchsdurchführung

Sie schauen durch das Gitter, um die Balmerlampe und das Spektrum der Lampe zu sehen. Gehen Sie mit dem Auge sehr nah heran. Anschließend arbeiten Sie zu zweit im Team. Während einer von Ihnen durch das Gitter schaut und die Lage der virtuellen Bilder der Lampe vor der Tafel beschreibt, macht der andere an der Tafel an den entsprechenden Stellen einen farbigen Strich. Achten Sie darauf, dass alle Tafelstriche genau über den virtuellen Bildern liegen. Bewegen Sie dazu den Kopf leicht hin und her. Ein dritter Schüler kann zur Kontrolle durch das Gitter schauen.

Auswertung

Zunächst ist der **Gitterabstand d** aus der Anzahl der Linien pro mm zu bestimmen. Messen Sie dann den **Abstand b des Gitters zur Tafel** und für jeden Strich einer Spektrallinie den jeweiligen **Abstand a zum Bild der Lampe** an der Tafel. Aus den Längen b und a wird der Beugungswinkel und die entsprechende Wellenlänge bestimmt. Dabei gilt:

$\sin(\alpha) = \frac{\lambda}{d}$ und $\tan(\alpha) = \frac{a}{b}$ (siehe Grafik)

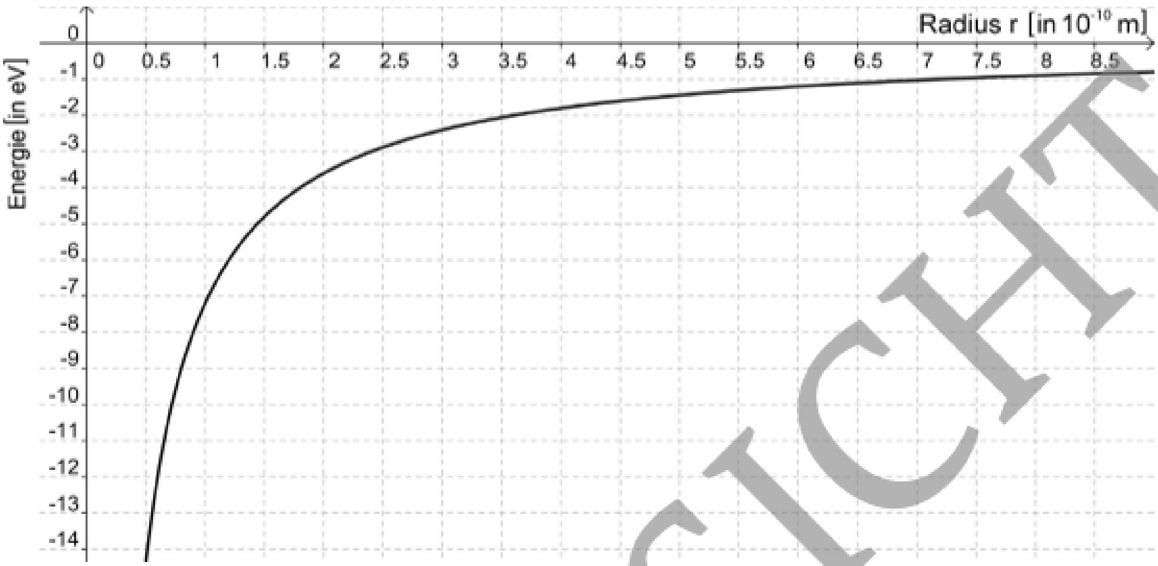
Stellen Sie die Ergebnisse für die verschiedenen Linien in einer Tabelle zusammen.

M 5 Das Potenzialdiagramm des Wasserstoffs

Die Gesamtenergie des Elektrons im Wasserstoffatom für einen bestimmten Bahnradius r_n beträgt nach M 3:

$$E_g = -\frac{1}{8\pi\varepsilon_0}\frac{e^2}{r_n}$$

Ihr Verlauf ist im folgenden Diagramm dargestellt.



Aufgaben

1. Übernehmen Sie die Werte für die Radien r_n und die entsprechenden Gesamtenergien aus M 3. Tragen Sie diese als vertikale bzw. horizontale Linien in das Diagramm ein. Die Linien repräsentieren die verschiedenen Energiezustände im Wasserstoffatom.

   Im Grundzustand ist das Elektron im Mittel etwa $0{,}5 \cdot 10^{-10}$ m vom Atomkern entfernt. Je größer seine Energie ist, desto weiter kann es sich vom Kern fortbewegen.

   Wechselt ein Elektron seine Bahn von größeren zu kleineren Energiewerten, so gibt es die überschüssige kinetische Energie in Form von Lichtquanten entsprechender Wellenlänge ab.

   Die Spektrallinien der **Balmerserie** des Wasserstoffspektrums kommen zustande, wenn Elektronen aus der 3., 4. ... n-ten Bahn **auf die 2. Bahn** fallen und ihre Energie als Photon abgeben.

   Die Energien der Photonen können durch: $E_{Ph} = E_n - E_2$ mit $n > 2$ bestimmt werden:

2. a) Tragen Sie die Übergänge der ersten drei Linien der Balmerserie als farbige Pfeile in das Potenzialdiagramm ein. Bestimmen Sie die Energien dieser Übergänge.

   $E_{32} = E_3 - E_2 =$ __________ eV; $E_{42} =$ __________ eV; $E_{52} =$ __________ eV

Tipp $E_5 = -0{,}54$ eV

b) Mit $E = h \cdot f = h \cdot \frac{c}{\lambda}$ können Sie schließlich die Wellenlängen der Photonen bestimmen.

   $\lambda_{32} =$ __________ nm; $\lambda_{42} =$ __________ nm; $\lambda_{52} =$ __________ nm

Tipp $h = 6{,}626 \cdot 10^{-34}$ Js und $1\ J = 0{,}6242 \cdot 10^{19}$ eV

$\Rightarrow h = 4{,}14 \cdot 10^{-15}$ eVs und $h \cdot c = 1{,}24 \cdot 10^{-6}$ eVm