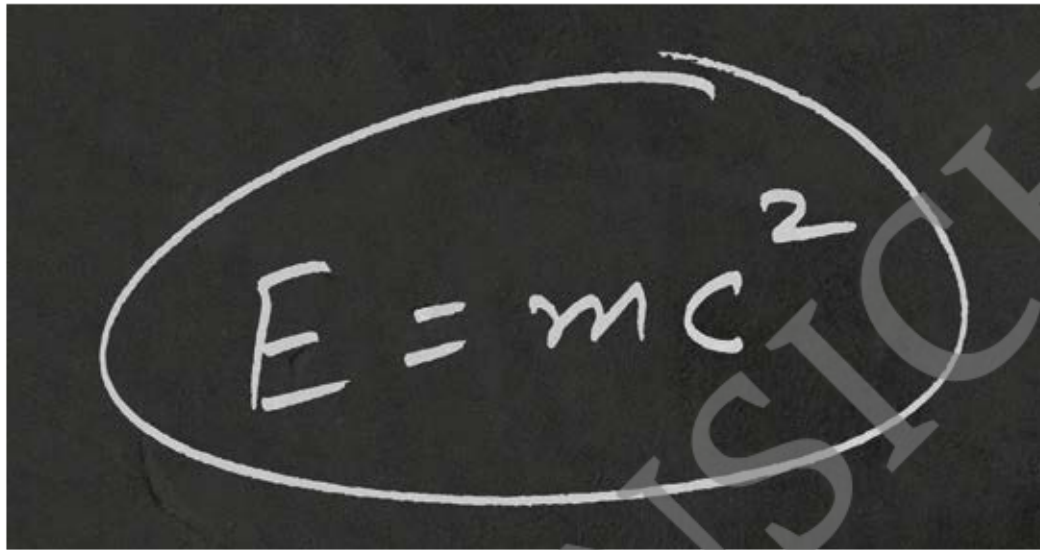


II.G.5

Relativitätstheorie

Die Grundgleichungen der speziellen Relativitätstheorie

Prof. Dr. Axel Donges



Die spezielle Relativitätstheorie wurde von Albert Einstein im Jahr 1905 formuliert. Sie revolutionierte unser Verständnis von Raum, Zeit, Bewegung, Masse und Energie. Diese Theorie basiert auf zwei grundlegenden Prinzipien: der Konstanz der Lichtgeschwindigkeit und der Gleichwertigkeit aller Inertialsysteme. Die spezielle Relativitätstheorie hat die Physik grundlegend verändert. Raum und Zeit wurden nun nicht mehr als getrennte, absolute Größen betrachtet, sondern als miteinander verknüpfte Bestandteile der Raumzeit. Die Energie-Masse-Äquivalenz erweiterte unser Verständnis von Energieumwandlungen, z. B. in Kernreaktionen.

KOMPETENZPROFIL

Klassenstufe: 11–13

Dauer: 16 Unterrichtsstunden (Minimalplan: 3)

Kompetenzen: Sachtexte mit physikalischem Bezug sinnentnehmend lesen; Verständnis der grundlegenden Gleichungen der speziellen Relativitätstheorie erhalten; Recherchieren zu physikalischen Sachverhalten, Übungsaufgaben lösen

Inhalt: Spezielle Relativitätstheorie: Relativitätsprinzip, Konstanz der Lichtgeschwindigkeit, Licht-Uhr, Zeit-Dilatation, Längen-Kontraktion, Äquivalenz von Energie und Masse, relativistisches Merkdreieck, relativistische Masse, kinetische Energie

Medien: Texte, Bilder, digitale Medien, Taschenrechner, Internet

Auf einen Blick

1.–6. Stunde

Thema: Zeit-Dilatation und Längen-Kontraktion

M 1 Einstein'sche Postulate

M 2 Zeit-Dilatation

M 3 Längen-Kontraktion

7.–10. Stunde

Thema: $E = mc^2$

M 4 Schwerpunktsatz

M 5 Energie-Masse-Äquivalenz

11.–16. Stunde

Thema: Energie, Masse und Impuls

M 6 Relativistisches Merkdreieck

M 7 Relativistische Masse

M 8 Kinetische Energie

Minimalplan

Die Unterrichtseinheit ist für insgesamt 16 Stunden ausgelegt. Bei Zeitmangel können auch nur die Materialien **M 1–M 3** (Zeit-Dilatation und Längen-Kontraktion), die Materialien **M 4–M 5** ($E = mc^2$) oder die Materialien **M 6–M 8** (Energie, Masse und Impuls) jeweils für sich allein behandelt werden.

Erklärung zu den Symbolen



Dieses Symbol markiert differenziertes Material. Wenn nicht anders ausgewiesen, befinden sich die Materialien auf mittlerem Niveau.



einfaches Niveau



mittleres Niveau



schwieriges Niveau

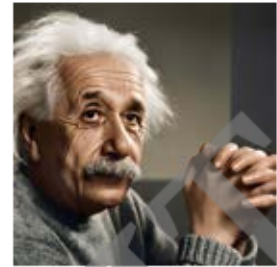
M 1

Einstein'sche Postulate

Die **Einstein'schen Postulate** bilden die Grundlage der **speziellen Relativitätstheorie (SRT)**, die Albert Einstein 1905 formulierte. Sie lauten:

Postulat 1: Relativitätsprinzip

Die Gesetze der Physik sind in allen inertialen Bezugssystemen (Bezugssysteme, die sich gleichförmig und geradlinig zueinander bewegen) gleich. Es gibt kein bevorzugtes Bezugssystem. Daher können physikalische Experimente innerhalb eines solchen Systems nicht feststellen, ob sich das System bewegt oder ruht.



© Shutterstock AI (KI-generiert)

Beispiel 1: Die Fallzeit eines Steins ist in einem ruhenden Zug oder in einem mit konstanter Geschwindigkeit fahrenden Zug gleich.

Beispiel 2: Aus Sicht des (ruhenden) Baumes bewegt sich das Auto mit einer Geschwindigkeit v auf den Baum zu. Man kann aber auch sagen: Aus Sicht des ruhend angenommenen Autos bewegt sich der Baum (samt Wurzeln und Erde) mit der Geschwindigkeit v auf das Auto zu. Beide Betrachtungsweisen sind gleichwertig.



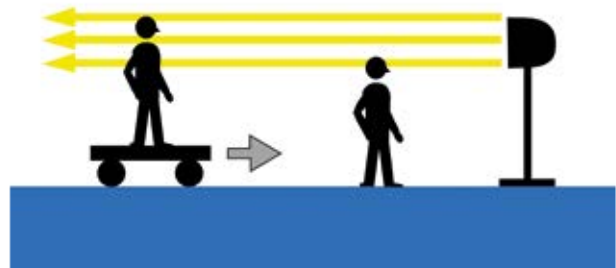
© RAABE

Postulat 2: Konstanz der Lichtgeschwindigkeit

Die Lichtgeschwindigkeit im Vakuum beträgt $299\,792\,458 \frac{\text{m}}{\text{s}}$. Sie ist für alle Beobachter gleich, unabhängig von deren Bewegung relativ zur Lichtquelle. Dies widerspricht der klassischen Mechanik, in der Geschwindigkeiten addiert werden.

Beispiel 1: Ein Auto fährt mit eingeschaltetem Licht. Ein mitfahrender Beobachter und ein am Straßenrand stehender Beobachter messen – unabhängig von der Geschwindigkeit des Autos – immer die gleiche Lichtgeschwindigkeit, nämlich $299\,792\,458 \frac{\text{m}}{\text{s}}$.

Beispiel 2: Ein Scheinwerfer strahlt Licht auf die beiden Beobachter. Der bewegte und der ruhende Beobachter messen die gleiche Lichtgeschwindigkeit. Dies ist aus Sicht der klassischen Physik unverständlich.



© Wikipedia, CC BY-SA 3.0

Aus den beiden Einstein'schen Postulaten ergeben sich revolutionäre Konsequenzen für Raum, Zeit und Bewegung.

Aufgabe

Ein Auto fährt mit einer Geschwindigkeit von $50 \frac{\text{km}}{\text{h}}$ bzw. $150 \frac{\text{km}}{\text{h}}$ mit eingeschalteten Scheinwerfern. Ein am Straßenrand stehender Physiker misst die Geschwindigkeit des Lichts, mit dem er von den Scheinwerfern angestrahlt wird. Was misst er?

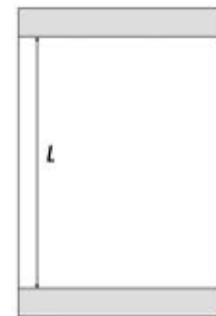


Zeit-Dilatation

M 2

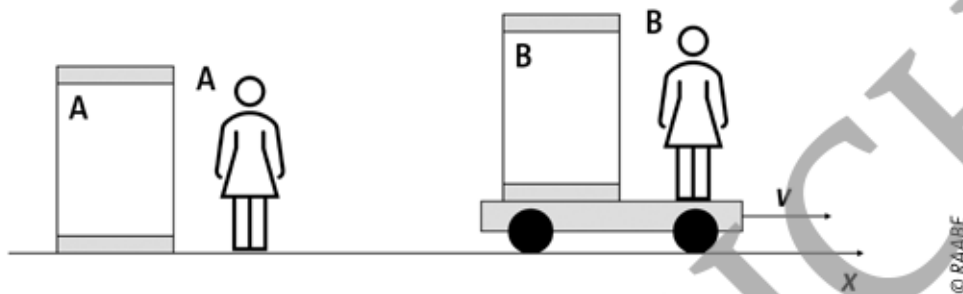
Gedanken-Experimente mit Lichtuhren

Eine Lichtuhr ist eine physikalische Anordnung, bei der die Laufzeit von Licht zum Messen von Zeiten ausgenutzt wird. Sie besteht aus einem evakuierten Rohr, an dessen Ende sich zwei Spiegel befinden. Zwischen den beiden Spiegeln wird ein Lichtpuls hin und her reflektiert. Ein Beobachter misst die Zeit (Periodendauer T), die das Licht benötigt, um einmal hin und her zu laufen. Sie definiert den Takt der Lichtuhr. Sie ist vergleichbar mit der Schwingungsdauer des Pendels einer Pendeluhr und gibt an, wie schnell die Uhr "tickt".



© RAABE

Wir diskutieren im Weiteren vier Spezialfälle:



© RAABE

Spezialfall a: Beobachter A beobachtet Lichtuhr A

Für die Periodendauer, die Beobachter A auf der Uhr A abliest, gilt

$$T = \frac{2L}{c} \quad (2.1)$$

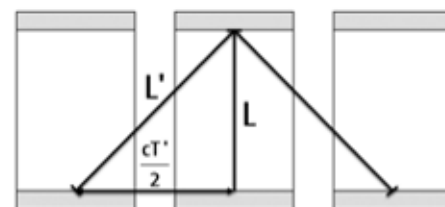
Die mit dieser Uhr gemessene Zeit t heißt **Eigenzeit**.

Spezialfall b: Beobachter B beobachtet Lichtuhr B ($v = 0$ oder $v \neq 0$)

Die durch (2.1) definierte Taktzeit T gilt auch dann, wenn Beobachter B die Zeit auf Uhr B abliest. Dies ist eine Konsequenz des postulierten Relativitätsprinzips (siehe Material M 1), welches besagt, dass die physikalischen Gesetze in allen Inertialsystemen gleich sein müssen. Auch mit dieser Uhr wird die Eigenzeit t gemessen.

Spezialfall c: Beobachter A beobachtet Lichtuhr B

Nun betrachten wir den Fall, dass sich die Lichtuhr B bewegt. Aus Sicht des ruhenden Beobachters A muss das Licht nun einen längeren Weg zurücklegen (siehe Abbildung), was die Taktzeit vergrößert. Es gilt nun $L' = \sqrt{L^2 + \left(\frac{cT'}{2}\right)^2}$. Da die Lichtgeschwindigkeit in allen Inertialsystemen als gleich



© RAABE

postuliert ist (siehe Material M 1), berechnet sich die neue Taktzeit zu $T' = \frac{2L'}{c} = \frac{2 \cdot \sqrt{L^2 + \left(\frac{vT'}{2}\right)^2}}{c}$.

Aufgelöst nach T' ergibt sich

$$T' = \gamma T = \gamma \frac{2L}{c} \quad \text{mit dem Lorentz-Faktor } \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}} \quad (2.2)$$

Spezialfall d: Beobachter B beobachtet Lichtuhr A

Die durch (2.2) definierte Taktzeit T' gilt auch dann, wenn der bewegte Beobachter B die Zeit auf der ruhenden Uhr A abliest. Dies ist eine Folge des postulierten Relativitätsprinzips (siehe Material **M 1**), wonach die physikalischen Gesetze in allen Inertialsystemen gleich sein müssen.

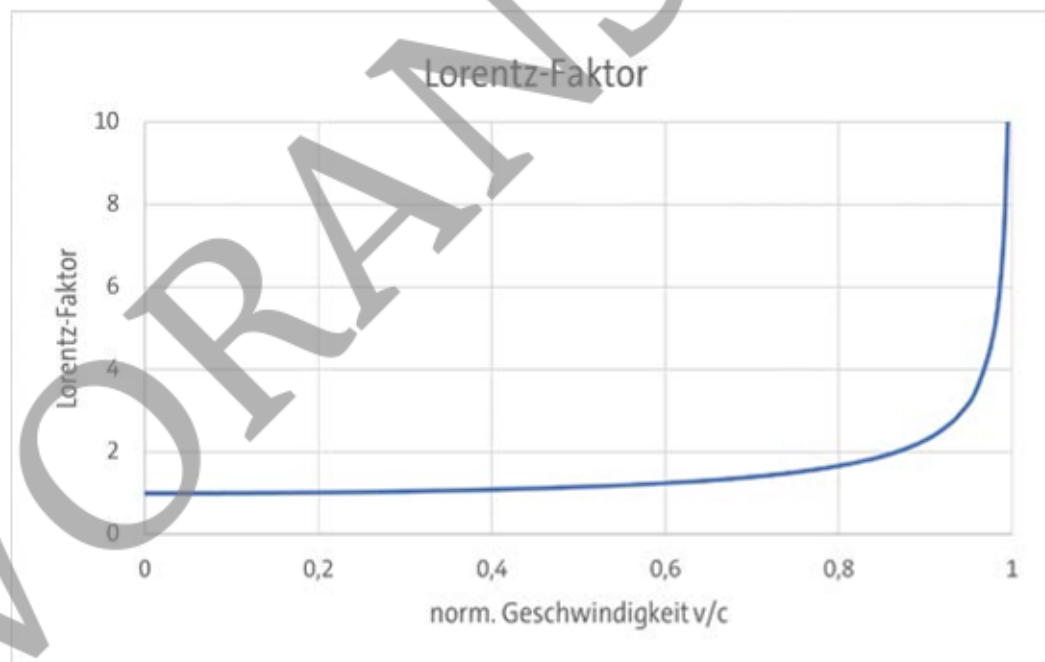
Ergebnis

Die von den Beobachtern A und B auf den Uhren A und B gemessenen Zeitintervalle Δt bzw. $\Delta t'$ sind proportional zu den Periodendauern T bzw. T' . Daher folgt aus (2.2):

$$\Delta t' = \gamma \Delta t \quad (2.3)$$

$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}} \geq 1$	... an der ruhenden Uhr A	... an der bewegten Uhr B
Messung des ruhenden Beobachters A ...	Spezialfall a: Δt (Eigenzeit)	Spezialfall c: $\Delta t' = \gamma \Delta t \geq \Delta t$ (dilatierte Zeit)
Messung des bewegten Beobachters B ...	Spezialfall d: $\Delta t' = \gamma \Delta t \geq \Delta t$ (dilatierte Zeit)	Spezialfall b: Δt (Eigenzeit)

In den Fällen c und d geht die Uhr langsamer als in den Fällen a und b: $\Delta t' = \gamma \Delta t \geq \Delta t$ (da $\gamma \geq 1$). Dieses Phänomen heißt **Zeit-Dilatation** (Zeitdehnung).



© RAABE

M 4

Schwerpunktsatz

Rechenbeispiel 1

Ein Wagen 1 mit der Masse m_1 und der Ortskoordinate x_1 rollt mit einer konstanten Geschwindigkeit v_1 auf einen ruhenden Wagen 2 mit der Masse m_2 und der Ortskoordinate $x_2 = 0$ zu. Für die Koordinate x_1 des Wagens 1 gilt

$$x_1 = x_{10} + v_1 t \quad (4.1)$$

Hierbei ist x_{10} die Koordinate von Wagen 1 zur Zeit $t = 0$. Die Koordinate x_s des Schwerpunktes ist der mit den beiden Massen m_1 und m_2 gewichtete arithmetische Mittelwert der beiden Koordinaten x_1 und x_2 :

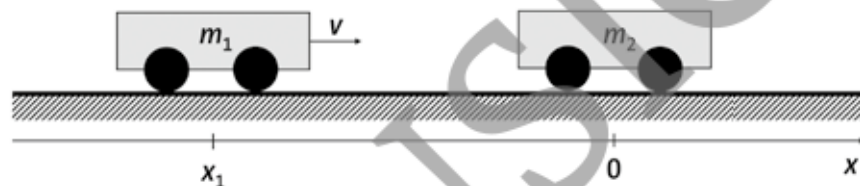
$$x_s = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2}{m_1 + m_2}. \quad (4.2)$$

Mit $x_2 = 0$ und (4.1) folgt

$$x_s = \frac{m_1 x_1}{m_1 + m_2} = \frac{m_1 (x_{10} + v_1 t)}{m_1 + m_2}. \quad (4.3)$$

Wir erkennen: Der Schwerpunkt beider Wagen bewegt sich mit der konstanten Geschwindigkeit

$$v_s = \frac{m_1 v_1}{m_1 + m_2}. \quad (4.4)$$



© RAABE

Wenn der Wagen 1 auf den Wagen 2 stößt, soll ein vollkommen unelastischer Stoß stattfinden, d. h., beide Wagen „kleben“ nach dem Stoß aneinander und bewegen sich mit der gemeinsamen Geschwindigkeit v' . Wegen des Impulserhaltungssatzes gilt

$$\underbrace{m_1 v_1}_{\text{Gesamtimpuls vor dem Stoß}} = \underbrace{(m_1 + m_2) v'}_{\text{Gesamtimpuls nach dem Stoß}}. \quad (4.5)$$

Dies liefert für die Geschwindigkeit der beiden Wagen (= Schwerpunktschwindigkeit) nach dem Stoß

$$v' = \frac{m_1 v_1}{m_1 + m_2}. \quad (4.6)$$

Ein Vergleich der Gleichungen (4.4) und (4.6) liefert: Der Schwerpunkt beider Wagen bewegt sich vor und nach dem Stoß mit der gleichen Geschwindigkeit. Dieses Ergebnis lässt sich verallgemeinern:

Schwerpunktsatz

Bewegen sich viele wechselwirkende Körper in einem **abgeschlossenen System**, so bewegt sich der **Schwerpunkt aller Körper des Systems** stets mit **konstanter Geschwindigkeit v_s** . Wichtig: Es muss sich wirklich um ein abgeschlossenes System handeln, d. h., kein Körper des Systems darf mit einem Körper außerhalb des Systems in Wechselwirkung stehen.

Rechenbeispiel 2

Wir betrachten ein aus **zwei** Körpern (Massen m_1 und m_2) bestehendes **abgeschlossenes** System. Die Ortskoordinaten der beiden Körper sind x_1 und x_2 . Dann gilt für die Koordinate des Schwerpunktes der beiden Körper

$$x_s = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2}{m_1 + m_2}. \quad (4.2)$$

Für die Änderung der Schwerpunkt-Koordinate erhalten wir

$$\Delta x_s = \frac{m_1 \Delta x_1 + m_2 \Delta x_2}{m_1 + m_2}. \quad (4.7)$$

Δx_1 bzw. Δx_2 sind die Verschiebungen der beiden Körper. Da in einem abgeschlossenen System $\Delta x_s = 0$ ist, folgt aus (4.7)

$$\Delta x_1 = -\frac{m_2}{m_1} \Delta x_2 \text{ bzw. } \Delta x_2 = -\frac{m_1}{m_2} \Delta x_1. \quad (4.8)$$

Das Minus-Zeichen gibt an, dass sich die beiden Körper in entgegengesetzte Richtungen bewegen.

Beispiel

Ein einzelner Zugwaggon (Masse $m_1 = 8,0$ t) parkt auf einem waagrechten Gleis. Ein links sitzender Fahrgast (Masse $m_2 = 60$ kg, siehe Bild rechts) setzt sich auf einen gegenüberliegenden freien Sitzplatz. Dadurch verschiebt sich der Schwerpunkt des Fahrgastes um die Strecke $\Delta x_2 = 1,5$ m von links nach rechts. Um welche Strecke Δx_1 verschiebt sich der Waggon, wenn man annimmt, dass er sich reibungsfrei auf dem Gleis bewegen kann (abgeschlossenes System)?



© Dusan Manic/iStock/Getty Images Plus

Antwort: Es gilt (4.8): $\Delta x_1 = -\frac{m_2}{m_1} \Delta x_2 = -\frac{60 \text{ kg}}{8000 \text{ kg}} \cdot 1,5 \text{ m} = -0,01125 \text{ m} = -1,125 \text{ cm}$.

Da sich der Fahrgast nach rechts bewegt, rollt der Wagen 1,125 cm nach links.

Aufgaben

1. Zwei Körper mit den Massen $m_1 = 1$ kg und $m_2 = 3$ kg haben einen Abstand von $L = 4$ m. Wo liegt der Schwerpunkt?
2. Ein Kind (Masse $m_k = 30$ kg) klettert in einem parkenden Auto von der Rückbank auf den Beifahrersitz. Dabei verschiebt sich der Schwerpunkt des Kindes um $\Delta x_k = 1,0$ m. Um welche Strecke Δx_A wird das Auto verschoben?
Hinweise: Masse des Autos $m_A = 1,4$ t, Handbremse gelöst und keine Reibung, ebener Parkplatz.
3. Ein im Weltall schwebender Astronaut (keine Geschwindigkeit) wirft ein Werkzeug der Masse $m_1 = 3,0$ kg mit einer Geschwindigkeit von $v_1 = 5,0 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ weg. Mit welcher Geschwindigkeit v_2 bewegt er sich danach durchs Weltall? Die Masse des Astronauten (ohne Werkzeug) ist $m_2 = 150$ kg.



© eddtoro/iStock/Getty Images Plus



M 7

Relativistische Masse

Mit der Definition des Impulses

$$p = mv \quad (7.1)$$

folgt aus (6.8)

$$(mc^2)^2 = (m_0c^2)^2 + (pc)^2 = (m_0c^2)^2 + (mvc)^2. \quad (7.2)$$

Weiterhin gilt:

$$(mc^2)^2 = (m_0c^2)^2 + \left(mc^2 \frac{v}{c}\right)^2 \quad \text{bzw.} \quad (7.3)$$

$$m^2 - \left(m \frac{v}{c}\right)^2 = m_0^2. \quad (7.4)$$

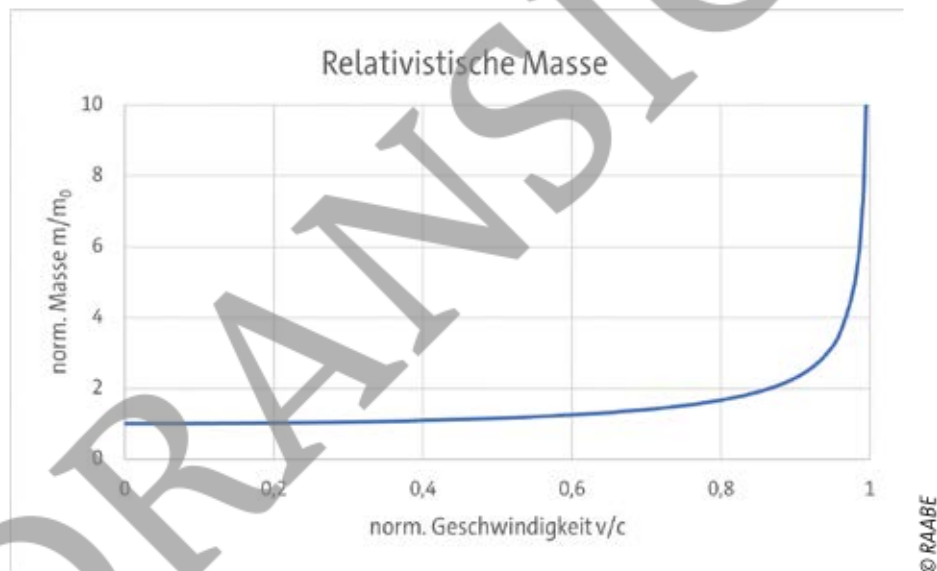
Auflösen nach m liefert schließlich

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}} \quad (7.5)$$

die Formel für die **relativistische Masse**.

Merke:

Die Masse m eines Körpers mit Ruhemasse m_0 wächst mit zunehmender Geschwindigkeit v .



Aufgaben

1. Wie schnell muss sich ein Körper bewegen, dass seine Masse m doppelt so groß ist wie seine Ruhemasse?
2. Ein Körper wird aus der Ruhe auf 10 % Lichtgeschwindigkeit beschleunigt. Welche relative Massenänderung $\frac{\Delta m}{m_0}$ erfährt er?
3. Warum kann ein Körper mit Ruhemasse niemals die Lichtgeschwindigkeit erreichen oder gar übersteigen?