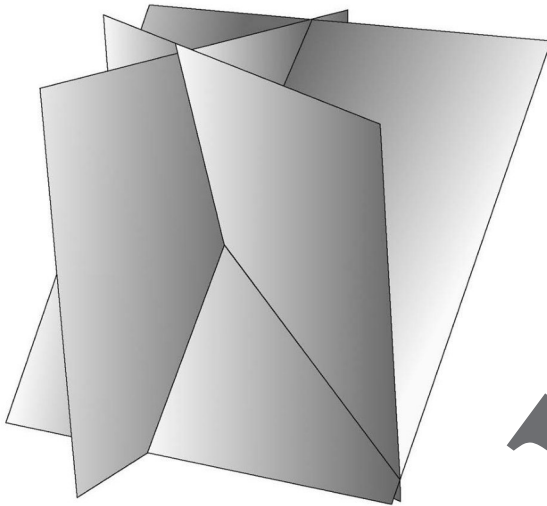


Der Gauß'sche Algorithmus – eine Lerntheke zur Lösung linearer Gleichungssysteme

Walter Czech, Krumbach

II/B



Der Schnitt dreier Ebenen (ausschnittsweise) ist eine Anwendung aus der Medizin. Jeweils zwei Ebenen schneiden sich in einer Geraden.

Klasse: 11/12

Dauer: 8 Stunden

Inhalt: Lineares Gleichungssystem (LGS); Gauß-Algorithmus; Ebenengleichung; Schnitt zweier Ebenen; Koordinatendarstellung; Textaufgaben; Anwendungen

Ihr Plus: 2 Tandembögen zur gegenseitigen Kontrolle

Die Aufnahme eines Computertomographen zeigt das Gehirn eines Patienten. Solche Bilder sind wichtig für die Behandlung von Menschen, bei denen man einen Tumor vermutet, von großer Wichtigkeit. Die Bilder bestehen aus Tausenden einzelner Punkte, die mehr oder weniger geschwärzt erscheinen. Diesen Schwärzungsgrad errechnet der Computer mit einem aufwendigen Verfahren, bei dem unter anderem das Lösen linearer Gleichungssysteme eine Rolle spielt.

Didaktisch-methodische Hinweise

Je älter die Schüler werden, desto mehr Selbstständigkeit wird von ihnen verlangt. Der moderne Oberstufenunterricht sollte die Schüler deshalb dazu anleiten, sich mathematische Inhalte selbst zu erschließen. Ein solches selbstbestimmtes Lernen befriedigt die grundlegenden Bedürfnisse der Schüler:

- Sie erleben sich als kompetent,
- sie fühlen sich von anderen (z. B. der Lehrkraft) unabhängig und
- sie werden sozial eingebunden, weil sie zum Beispiel mit ihren Banknachbarn zusammenarbeiten.

Fordern und fördern Sie den individuellen Lernprozess Ihrer Schüler durch Aufgaben, die sie sich an einer **Lerntheke (M 4–M 8)** selbst ausgesuchen. Die Lerntheke behandelt vorwiegend Inhalte der **analytischen Geometrie**, insbesondere den Schnitt zweier und dreier Ebenen. Sie umfasst fünf Arbeitsblätter.

So bereiten Sie die Lerntheke vor

- Kopieren Sie die Materialien **M 4–M 8** jeweils in Klassenstärke und legen Sie sie auf den Fensterbänken oder einem separaten Tisch stapelweise aus. Ein Exemplar eines jeden Materials stecken Sie in eine Klarsichtfolie bzw. laminieren es.
- Die **Lösungen** zu **M 4–M 8** kopieren Sie ebenfalls in Klassenstärke und legen sie getrennt von den Arbeitsblättern, z. B. auf dem Lehrpult, aus. **M 6** und **M 7** bilden dabei eine Einheit. Ein Exemplar der Lösung stecken Sie jeweils in eine Klarsichtfolie bzw. laminieren es.
- Die **Lernerfolgskontrolle** und ihre Lösung kopieren Sie in Klassenstärke.
- Jeder Schüler bringt ein großformatiges Heft mit (DIN A4, Karo, mit Rand), in das er die Arbeitsblätter einklebt und die schriftlichen Notizen (Rechnungen) einträgt.



Eine Lerntheke im Klassenraum

Foto: Franz-Michael Becker

Notwendige Vorkenntnisse

- Lösen linearer Gleichungssysteme mit zwei Gleichungen und zwei Unbekannten, insbesondere: Gleichsetzungs-, Einsetzungs- und Additionsverfahren, vgl. 11 Abits I/C, Reihe 35
- Vektorrechnung
- Gleichungen von Gerade und Ebene im Raum
- Koordinatenform der Ebenengleichung

Ablauf

Die Schüler sehen sich Material **M 1** als Hausaufgabe an. Dieses Material erklärt ihnen, wie man Texte in Gleichungen übersetzt. In **M 2** wenden sie dieses Wissen an. Für die **Tandembögen M 3** suchen sich die Schüler einen Partner. Sie knicken das Blatt in der Mitte und stellen es zwischen sich auf. So können sie sich gegenseitig kontrollieren.

Zu Beginn der Stunde 3 erläutern Sie kurz Sinn und Zweck der Lerntheke (die eigene Selbstständigkeit trainieren!) und wie man daran arbeitet. Die Schüler holen sich die Materialien selbst. Sie bearbeiten der Reihe nach die Materialien **M 4–M 8** und überprüfen ihre Lösungen anhand der Lösungsblätter. Sie arbeiten selbstständig und eigenverantwortlich. Bei Fragen wenden sie sich an ihren Banknachbarn. Sie als Lehrkraft leisten bei Schwierigkeiten Hilfestellung. Anschließend präsentieren fünf Schüler, die Sie durch Losentscheid bestimmen, ihre Ergebnisse im Plenum. Die Materialien **M 6** und **M 7** dienen als Grundlage für **Referate**. Eventuell vergeben Sie diese Materialien auch als Zusatzaufgabe an besonders interessierte Schüler. Die Lösungen stellen diese Schüler im Plenum vor. Die **Lernerfolgskontrolle M 9** gibt den Schülern Rückmeldung zu ihrem Lernerfolg. Verzichten Sie auf eine Benotung.

Ziele

Die Schüler

- frischen ihre Kenntnisse zum Lösen linearer Gleichungssysteme mit zwei Gleichungen und zwei Unbekannten auf (Gleichsetzungs-, Einsetzungs- und Additionsverfahren),
- gehen routinierter und sicherer mit dem neuen Werkzeug **Gauß-Algorithmus** um,
- setzen gegebenenfalls einen CAS-Rechner sinnvoll ein,
- deuten ein lineares Gleichungssystem (LGS) geometrisch,
- erleben, dass Mathematik in unserer Umwelt allgegenwärtig ist,
- wenden mathematische Grundkenntnisse auf unterschiedliche Situationen an,
- stellen ihre Lösungen anderen vor, diskutieren sie in der Gruppe und lernen dabei, schwierige Sachverhalte mit einfachen Worten klar darzustellen,
- üben soziale Formen und erfahren Teamarbeit als positives Element.

Tipps

Lineare Gleichungssysteme lassen sich auch mit einem CAS-Rechner lösen.

Literatur

[1] Benno Artmann, Günter Törner: Lineare Algebra und Geometrie. Göttingen: Vandenhoeck & Ruprecht 1988.

Auf einen Blick

Einstieg: Das Lösen linearer Gleichungssysteme wiederholen (HA = Hausaufgabe)

Material	Thema	Stunde
M 1	Viehhandel in China – Text in Gleichungen übersetzen Eine schrittweise Anleitung zur Lösung von Textaufgaben	1. HA
M 2	Lineare Gleichungssysteme (LGS) im Alltag Textaufgaben mithilfe linearer Gleichungssysteme lösen	2.
M 3	Schnitt oder kein Schnitt – Lagebeziehungen beschreiben Ein Versuch mit Schaschlikstäben: Die Lagebeziehung von Geraden im zwei- und dreidimensionalen Raum beschreiben	2.

Lerntheke: Der Gauß-Algorithmus zur Lösung eines linearen Gleichungssystems

Material	Thema	Stunde
M 4	Wie Carl Friedrich Gauß Unbekannte eliminierte Einführung der Stufenform eines LGS	3.
M 5	Vervielfachen und addieren – der Gauß'sche Algorithmus Elementare Zeilenoperationen üben, die Matrixschreibweise kennenlernen und das LGS in die Stufenform überführen	4.

Lineare Gleichungssysteme geometrisch betrachtet

Material	Thema	Stunde
M 6	LGS mit Parameter und geometrische Deutung eines LGS Ein lineares Gleichungssystem mit einem Parameter lösen; Eigenschaften eines Parameters; ein LGS geometrisch deuten	5.
M 7	Es gibt Schnittpunkte – algebraische Lösung eines LGS Lösung eines LGS als Schnittmenge dreier Ebenen	6.
M 8	Lineare Gleichungssysteme in Anwendungen Eine Geradengleichung in Koordinatenform aufstellen; eine Funktionsvorschrift für eine ganzrationalen Funktion finden	7.

Lernerfolgskontrolle

Material	Thema	Stunde
M 9	Lineare Gleichungssysteme – testen Sie Ihr Wissen! Gauß-Algorithmus; zeichnerische Lösung; geometrische Deutung	8.

Minimalplan

Beschränken Sie sich auf die Materialien M 4 und M 5. Die Materialien M 1 und M 2 haben die Schüler als Hausaufgabe bearbeitet.

M 1 Viehhandel in China – Text in Gleichungen übersetzen

Aufgabe

- Verkauft man 2 Elefanten und 5 Hammel, so kann man sich dafür 13 Schweine kaufen und hat noch 1000 Münzen übrig.
- Verkauft man 3 Elefanten und 3 Schweine, so kann man dafür genau 9 Hammel kaufen.
- Verkauft man 6 Hammel und 8 Schweine und legt noch 600 Münzen drauf, so erhält man dafür 5 Elefanten.

Was kosteten Elefant, Hammel und Schwein um etwa 200 Jahre v. Chr. in China?

So geht's

Drücken Sie die Angaben in Form von Gleichungen aus.

Beispiele

- Verkauft man 3 Elefanten und 3 Schweine, so kann man dafür genau 9 Hammel kaufen.

Lautet in mathematischer Kurzschrift (als Gleichung):

$x_1 \cong$ Preis für einen Elefanten

$x_2 \cong$ Preis für einen Hammel

$x_3 \cong$ Preis für ein Schwein

$$3x_1 + 3x_3 = 9x_2 \Leftrightarrow 3x_1 - 9x_2 + 3x_3 = 0$$

- Verkauft man 6 Hammel und 8 Schweine und legt noch 600 Münzen drauf, so erhält man dafür 5 Elefanten.

$$6x_2 + 8x_3 + 600 = 5x_1 \Leftrightarrow -5x_1 + 6x_2 + 8x_3 = -600$$

Man erhält so das lineare Gleichungssystem:

$$(I) \quad 2x_1 + 5x_2 - 13x_3 = 1000$$

$$(II) \quad 3x_1 - 9x_2 + 3x_3 = 0$$

$$(III) \quad -5x_1 + 6x_2 + 8x_3 = -600$$

Wir dividieren (II) durch 3, lösen nach x_1 auf und setzen die erhaltene Gleichung in (I) und (III) ein.

Also:

$$(II') \quad x_1 = 3x_2 - x_3$$

$$\text{In (I)} \quad \bullet (3x_2 - x_3) + 5x_2 - 13x_3 = 1000 \Leftrightarrow (IV) \quad 11x_2 - 15x_3 = 1000$$

$$\text{In (III)} \quad \bullet (3x_2 - x_3) + 6x_2 + 8x_3 = -600 \Leftrightarrow (V) \quad -9x_2 + 13x_3 = -600$$

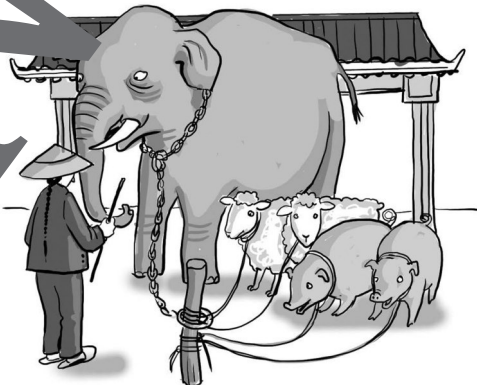
Wir multiplizieren (IV) $\cdot 9$ + (V) $\cdot 11$ und erhalten die Beziehung:

$$-135x_3 + 143x_3 = 9000 - 6600 \Leftrightarrow 8x_3 = 2400 \Leftrightarrow x_3 = 300;$$

also $x_2 = 500$ (aus (IV) oder aus (V)); $x_1 = 1200$ (aus (II'))

Ein Elefant kostete 1200 Münzen, ein Hammel 500 Münzen und ein Schwein 300 Münzen.

Probe: (I) $2 \cdot 1200 + 5 \cdot 500 - 13 \cdot 300 = 1000 \checkmark$



Reihe 8	Verlauf	Material S 2	LEK	Glossar	Lösungen
----------------	----------------	------------------------	------------	----------------	-----------------

M 2 Lineare Gleichungssysteme (LGS) im Alltag

Dies sind einige Textaufgaben, die Sie durch ein lineares Gleichungssystem beschreiben und dann mit dem in M 1 dargestellten Verfahren lösen können.

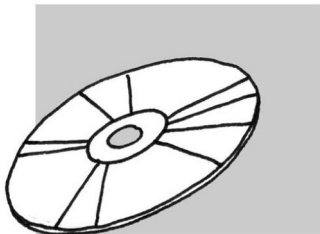
Aufgaben

- Suchen Sie sich zwei Textaufgaben aus und lösen Sie sie. Bezeichnen Sie die unbekannten Größen mit x_1 und x_2 .
- Erstellen Sie ein Schema zur Lösung solcher Aufgaben. Präsentieren Sie Ihr Schema an einem Beispiel.



Aufgabe 1

Im Elektrofachmarkt



Nina und Ben sind in einem Elektrofachmarkt und zahlen wie folgt:

Nina: 1 DVD und 2 CDs: 70 €

Ben: 2 DVDs und 1 CD: 80 €

Wie teuer ist 1 CD/1 DVD?

Lösung: $x_1 = 30$, $x_2 = 20$

Aufgabe 2

Aus der Landwirtschaft



Foto: Pixelio, R. Ruth

Auf einem Bauernhof gibt es Kaninchen und Hühner. Es sind insgesamt 381 Tiere. Alle Tiere zusammen haben 1192 Beine.

Wie viele Kaninchen und wie viele Hühner sind auf dem Bauernhof?

Lösung: $x_1 = 215$, $x_2 = 166$



Aufgabe 3

Aus der Algebra von Leonard Euler

20 Personen – Männer und Frauen – besuchen ein Gasthaus. Die gesamte Zechens betragt 10 Groschen (entspricht 6 Reichstalern). Jeder Mann gibt 8 Groschen, jede Frau 7 Groschen.

Wie viele Männer und wie viele Frauen waren es?

Lösung: $x_1 = 16$, $x_2 = 4$

Leonard Euler (1707– 1783), Pastell von Emanuel Handmann, 1753 (Kunstmuseum Basel)



Aufgabe 4

Aus Mathematik in neun Büchern von Liu Hui

Der Kauf von 2 Ochsen und 5 Eseln kostet 350 Münzen. Anstatt 10 Esel zu kaufen, kann man auch 1 Ochsen kaufen, muss aber noch 50 Münzen draufzahlen.

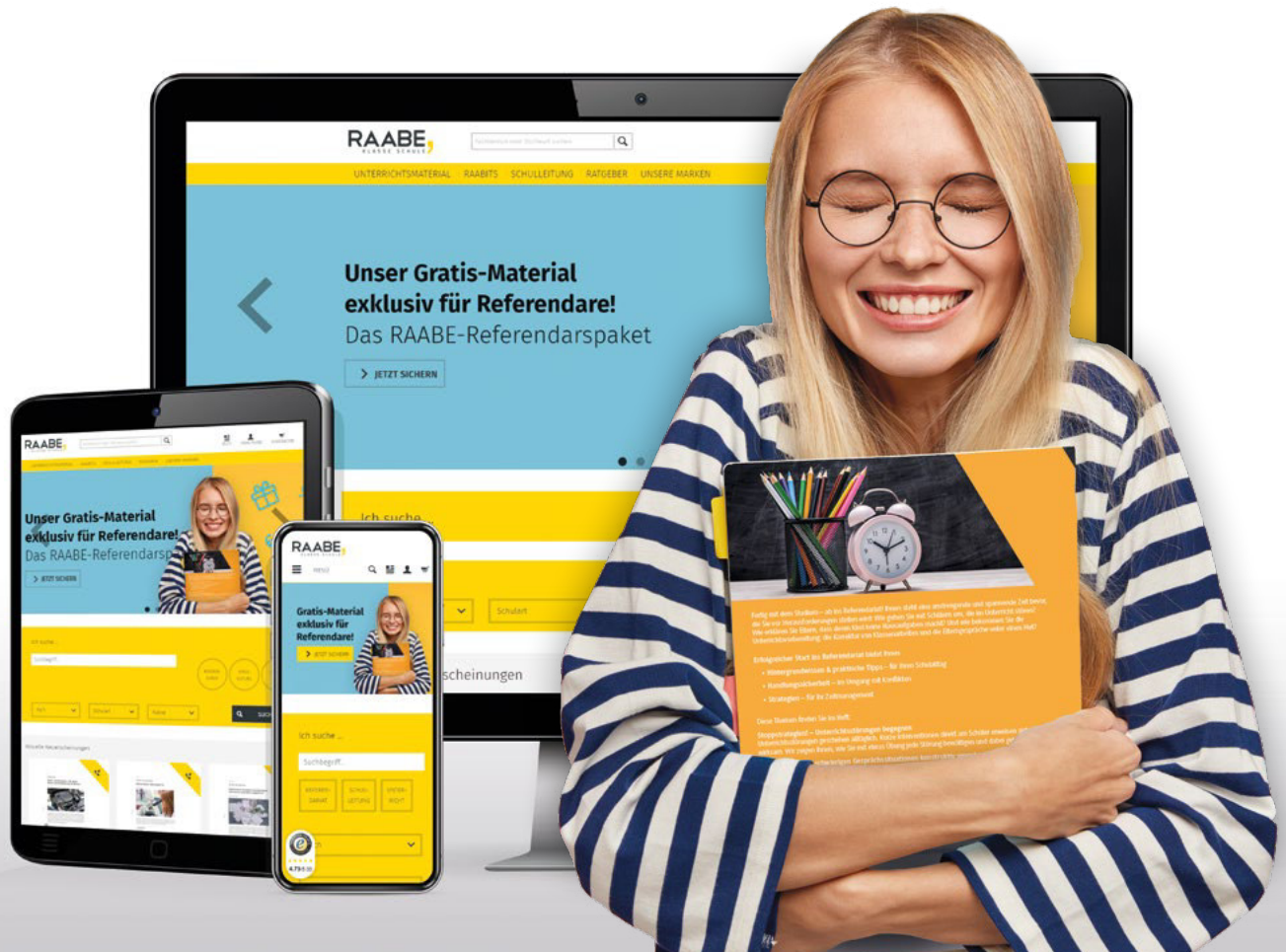
Was kosteten ein Ochse und ein Esel zur Zeit Liu Huis in China?

Info: Im alten China gab es ein Lehrbuch *Mathematik in neun Büchern*, das wahrscheinlich um 180 v. Chr. vom Mathematiker Shang Cang verfasst wurde und uns in der Bearbeitung von Liu Hui aus dem Jahre 263 n. Chr. überliefert ist.

Lösung: $x_1 = 150$, $x_2 = 10$

Sie wollen mehr für Ihr Fach?

Bekommen Sie: Ganz einfach zum Download im RAABE Webshop.



Über 4.000 Unterrichtseinheiten
sofort zum Download verfügbar



Sichere Zahlung per Rechnung,
PayPal & Kreditkarte



Exklusive Vorteile für Abonnent*innen

- 20% Rabatt auf alle Materialien für Ihr bereits abonniertes Fach
- 10% Rabatt auf weitere Grundwerke



Käuferschutz mit Trusted Shops



Jetzt entdecken:
www.raabe.de