

Reihe 10 S 1	Verlauf	Material	LEK	Glossar	Lösungen
-----------------	---------	----------	-----	---------	----------

## Einfach optimal – Extremwertaufgaben lösen

Dr. Beate Bathe-Peters, Berlin



Foto: Dr. Bathe-Peters

Welche Maße hat das größte Hühnergehege, das man mit einem 20 m langen Zaun abtrennen kann?

**Klasse** 11 und 12

**Dauer** 7 Stunden

**Inhalt** Verschiedene Methoden, um Extremwertaufgaben zu lösen, unter anderem der Solver von Excel; Anleitung für das generelle Vorgehen hierbei; Übungen

**Ihr Plus** Gruppenpuzzle, Stationenzirkel, Material zur Binnendifferenzierung

Mit diesem Material liefern wir Ihnen Texte, die Extremwertaufgaben enthalten. Es gilt, den Inhalt zu erfassen und ein passendes mathematisches Modell zu finden. Dann muss man eine geeignete Lösungsmethode wählen und das Ergebnis im Sinne der Aufgabenstellung interpretieren. Die Aufgaben stammen aus den unterschiedlichsten Bereichen, z.B. der Astronomie, der Schifffahrt und der Biologie.

Neben grafischen Methoden und den Werkzeugen der Differentialrechnung kommt der Solver von Excel zum Einsatz. Dieses Tool ist sehr mächtig. Man kann damit Variationen der Ausgangsbedingungen leicht berücksichtigen.

## Didaktisch-methodische Hinweise

Man muss nicht Akademiker sein oder es werden wollen, um sich mit Extremwertaufgaben auseinander zu setzen. Auch der Landwirt ist mit Fragestellungen konfrontiert, die auf eine Extremwertaufgabe hinauslaufen.

### Voraussetzung der Unterrichtseinheit

Die Schülerinnen und Schüler haben die Herleitung der Sätze der Differenzialrechnung verstanden. Sie beherrschen die gängigen Argumentationen, können den Ausdruck für die Zielfunktion begründen und ihre Extremwerte mithilfe der Differenzialrechnung berechnen.

### Ein mathematisches Modell formulieren – die erste Schwierigkeit

Die Problemstellung zu verstehen, die meist in Form einer Textaufgabe vorliegt, ist die erste Hürde, die die Schülerinnen und Schüler nehmen müssen. Ist aus den Informationen ein mathematisches Modell entstanden, so besteht die zweite Schwierigkeit darin, die Extremwertaufgabe zu lösen. Dies kann auf verschiedene Art und Weise erfolgen. Einfaches Experimentieren, die grafische Darstellung, die Differenzialrechnung und die Näherungsverfahren von Excel sind Möglichkeiten, die Extremwerte der Zielfunktion zu bestimmen. Die Schülerinnen und Schüler erkennen im Verlauf der Einheit, wo die Stärken und Schwächen der einzelnen Methoden liegen.

Wir verdeutlichen die Vorgehensweise, wie man ein geeignetes Modell findet, anhand eines Beispiels. Sodann stellen wir verschiedene Lösungsstrategien vor und erproben sie.

### Ziele der Reihe

Die Schülerinnen und Schüler können

- für Extremwertaufgaben, die in Form einer Textaufgabe vorliegen, ein geeignetes mathematisches Modell finden,
- Extremalbedingung, Nebenbedingungen und Zielfunktion aufstellen,
- ein Verfahren zur Bestimmung der Extremwerte der Zielfunktion wählen,
- die Vor- und Nachteile der unterschiedlichen Lösungsverfahren angeben,
- die Extremwerte der Zielfunktion bestimmen,
- die Ergebnisse im Sinne der Aufgabenstellung interpretieren und das Ergebnis dementsprechend formulieren.

### Ablauf

**M 2** bereitet die Lösung der Extremwertaufgabe *Hühnergehege* vor. **M 3** stellt den Schülerinnen und Schülern verschiedene Lösungswege für diese Aufgabe vor. Hier bietet sich ein Gruppenpuzzle, Gruppenarbeit oder ein Stationenzirkel mit anschließender Präsentation an. **M 4** beschreibt die Bedingungen für das Vorliegen von Extremalstellen.

Die folgenden Materialien (**M 5 – M 8**) bearbeiten die Schülerinnen und Schüler mithilfe der Differenzialrechnung, probieren aber auch andere Lösungsmethoden aus. Hierbei müssen sie verschiedene Vorgaben beachten.

**M 9** betont speziell die Möglichkeit, mit dem Solver von Excel zu experimentieren. Die Lösung von **M 10** kontrollieren die Schülerinnen und Schüler mit dem grafischen Taschenrechner. Achten Sie darauf, dass sie vorher schon genug Erfahrung mit dem Ableiten „von Hand“ gesammelt haben, sodass sie dieses Hilfsmittel nur zur Kontrolle einsetzen.

<b>Reihe 10</b> S 3	<b>Verlauf</b>	<b>Material</b>	<b>LEK</b>	<b>Glossar</b>	<b>Lösungen</b>
------------------------	----------------	-----------------	------------	----------------	-----------------

**Erweiterung: Die partielle Differenziation – auch hierzu eine Extremwertaufgabe**

Welche Ausmaße muss ein Quader vorgegebenen Volumens haben, damit seine Oberfläche minimal ist?

Die Extremalbedingung lautet  $O = 2lh + 2bh + 2lb$  ( $l$  = Länge,  $b$  = Breite,  $h$  = Höhe). Da  $l$  gilt für ein konstantes Volumen  $V = l \cdot b \cdot h \Rightarrow l = V/(b \cdot h)$  und man erhält die Zielfunktion

$$O(b, h) = \frac{2V}{b} + 2bh + \frac{2V}{h}, \text{ die man minimieren muss.}$$

Sie bilden die partiellen Ableitungen nach jeder der beiden Variablen und setzen diese gleich 0.

$$O_h = 2b - \frac{2V}{h^2} \stackrel{!}{=} 0 \Rightarrow bh^2 = V \quad O_b = -\frac{2V}{b^2} + 2h \stackrel{!}{=} 0 \Rightarrow b^2h = V \Rightarrow b = h$$

Aus der Nebenbedingung erhält man  $h^2 l = V$  und somit auch  $l = b$ . Die drei Seiten müssen gleich lang sein. Also ist der Quader minimaler Oberfläche ein Würfel. Weitergehend müssten Sie genau genommen die Determinante der zweiten Ableitungen bzw. die Werte in der Umgebung der errechneten Extremwertstelle untersuchen, um eindeutig zu erkennen, dass ein Minimum vorliegt.

**Bezug zu den Bildungsstandards der Kultusministerkonferenz**

Allg. mathematische Kompetenz	Leitidee	Inhaltsbezogene Kompetenzen Die Schülerinnen und Schüler ...	Anforderungsbereich
K 1, K 3	L 1, L 4	... finden das passende Modell für die Problemsituation, formulieren die Lösungsidee und wählen (begründet!) eine Lösungsmethode aus,	II, III
K 2, K 4	L 1, L 4	... identifizieren die Zielfunktion, die Extremal- und die Nebenbedingung,	I
K 4, K 5	L 1, L 4	... wenden ihre Methode an und gelangen damit zu Ergebnissen,	I
K 1, K 2	L 1, L 4	... überprüfen die Plausibilität ihrer Ergebnisse durch Vergleich mit den Vorgaben der Textaufgabe und interpretieren ihr Ergebnis im Sachzusammenhang,	II, III
K 6	L 4	... stellen ihren Lösungsweg verständlich dar.	I – III

**Abkürzungen**

*Kompetenzen:*

K 1 (Mathematisch argumentieren); K 2 (Probleme mathematisch lösen); K 3 (Mathematisch modellieren); K 4 (Mathematische Darstellungen verwenden); K 5 (Mit symbolischen, numerischen sowie mit graphischen und technischen Elementen der Mathematik umgehen); K 6 (Kommunizieren)

*Leitideen:*

L 1 (Zahl und Zahlbereich); L 2 (Messen und Größen); L 3 (Raum und Form); L 4 (Funktionaler Zusammenhang); L 5 (Daten und Zufall)

*Anforderungsbereiche:*

I Reproduzieren; II Zusammenhänge herstellen; III Verallgemeinern und Reflektieren

<b>Reihe 10</b> S 4	<b>Verlauf</b>	<b>Material</b>	<b>LEK</b>	<b>Glossar</b>	<b>Lösungen</b>
------------------------	----------------	-----------------	------------	----------------	-----------------

II/A

## Auf einen Blick

Material	Thema	Stunde
M 1	<b>Das Gruppenpuzzle – so geht's</b>	1
M 2	<b>Bauer Antons Hühnerhof – sich das Vorgehen klarmachen</b> Vorbereitende Routinearbeiten erkennen und ausführen	
M 3	<b>Viele Wege führen zum Ziel – ein Beispiel als Einstieg</b> Die Extremwerte der Zielfunktion mit verschiedenen Methoden bestimmen: – experimentell – zeichnerisch – geometrisch – numerisch – mithilfe der Differenzialrechnung und – mit dem Solver von Excel	
M 4	<b>Kein Weg ist zu beschwerlich – ein Beispiel in die Physik</b> Die Bedingungen für das Vorhandensein von Extremstellen angeben	3

### Stationenzirkel (oder Gruppenarbeit) – Analysis praktisch angewandt

Übungsaufgaben mithilfe der Differenzialrechnung lösen, eine weitere Methode ausprobieren

Material	Thema	Stunde
M 5	<b>Die optimale Getränke-Analyse praktisch angewandt</b>	4 – 6
M 6	<b>Die Bahn eines Kometen – Analysis praktisch angewandt</b>	
M 7	<b>Trampolin – Analysis praktisch angewandt</b>	
M 8	<b>Mit dem Boot zur Gartenschau – Analysis praktisch angewandt</b>	

### Abschluss der Unterrichtseinheit

Material	Thema	Stunde
M 9	<b>Mein Koffer ist zu klein – der Solver von Excel</b> Mit dem Solver von Excel experimentieren	7
M 10	<b>Zwei Boote – den Taschenrechner einsetzen</b> Der Taschenrechner als Hilfe für Routineaufgaben	

### Arbeitsplan

Lassen Sie die Lernenden mit M 2 die Routinearbeiten wiederholen, mit M 3 die Extremwerte der Zielfunktion auf verschiedene Art und Weise bestimmen und wahlweise eine Aufgabe des Stationenzirkels (M 5 – M 8) lösen.

## M 2

Bauer Antons Hühnerhof –  
sich das Vorgehen klarmachen

Auf dem Bauernhof ist viel los. Damit Anton die Eier nicht auf dem ganzen Gelände suchen muss, möchte er ein Gelände vor dem Hühnerstall abhegen, und zwar so, dass die Hühner durch eine Tür ins Innere des Hühnerstalls gelangen können. Das Gehege wird also an einer Seite durch die Wand des Stalls begrenzt. Im Schuppen findet er noch Material für einen 20 m langen Zaun. Er möchte damit ein möglichst großes Gehege abteilen.

**Aufgabe**

- Verdeutlichen Sie das Problem anhand einer Skizze. Bezeichnen Sie die gesuchten Strecken mit Variablen.
- Formulieren Sie das Problem mathematisch. Stellen Sie dazu Formeln auf.
- Beschreiben Sie eine Methode, das Problem zu lösen.
- Erstellen Sie eine Checkliste mit den nötigen Schritten zum Lösen von Extremwertaufgaben.

**Merke**

Aufgaben, in denen entweder ein möglichst Kleines oder möglichst Großes gesucht wird, bezeichnet man als **Extremwertaufgaben**. Es gibt verschiedene Möglichkeiten, sie zu lösen.

Aber einige Schritten sind in allen Lösungswegen gleich. Dazu gehört das Erstellen des mathematischen Modells und zum Schluss die Interpretation des errechneten Ergebnisses.



Fotos: Dr. Bathe-Peters

## M 3 Viele Wege führen zum Ziel – ein Beispiel als Einstieg

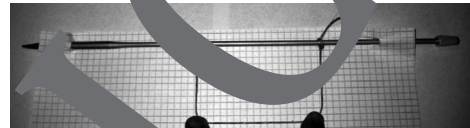
### 3.1 Die Maße des Hühnergeheges – die experimentelle Methode anwenden

Wenn man das Problem nicht rechnerisch lösen möchte, so geht dies auch durch einen Versuch:

**Schülerversuch** (zu zweit) ⌚ Vorbereitung: 5 min ⌚ Durchführung: 10 min

#### Material

- |   |  |
|---|--|
| <input type="checkbox"/> 1 Blatt Karopapier | <input type="checkbox"/> Lineal                        |
| <input type="checkbox"/> lange Stricknadel  | <input type="checkbox"/> mindestens 30 cm lange Schnur |
| <input type="checkbox"/> 2 Stifte           |  |



#### Versuchsvorbereitung

Knüpfen Sie im Abstand von 20 cm (entsprechend den Knoten) die Schnur. Die Stricknadel wird zuerst durch das Papier, dann durch die beiden Knoten und dann wieder durch das Papier gestochen. Sie soll dabei genau auf einer Linie liegen. Kontrollieren Sie zum Schluss den Abstand der Knoten noch einmal mit dem Lineal.

#### Versuchsdurchführung: Wie erhalte ich die größte eingeschlossene Fläche?

Beachten Sie, dass immer zwei Kästchen  $1 \text{ cm}$  entsprechen (sollten Sie eine andere Einteilung verwenden, müssen Sie vorher messen und die Einheit entsprechend anpassen).

- Spannen Sie die Schnur an den Stiften der beiden Stifte in verschiedenen Positionen so, dass Sie den Flächeninhalt gut ausrechnen können. Die Stifte stechen Sie in die beiden äußeren Ecken des Hühnergeheges (vgl. Abbildung).
- Die Stricknadel symbolisiert die Wand des Hühnergeheges.
- Variieren Sie die Position der Stifte so lange, bis der Flächeninhalt maximal ist.
- Nun messen Sie Länge und Breite des Geheges und lesen den zugehörigen Flächeninhalt ab.
- Halten Sie Vorgehen und Ergebnis des Versuchs stichpunktartig in Ihrem Heft fest.



### 3.2 Die Maße des Hühnergeheges – die zeichnerische Methode anwenden

Zeichnen Sie die Zielfunktion. Dies kann entweder mithilfe einer Wertetabelle geschehen oder Sie zeichnen über die Zielfunktion in Scheitelpunktsform und nutzen Ihre Kenntnisse zur Lage solcher Funktionen im Koordinatensystem.

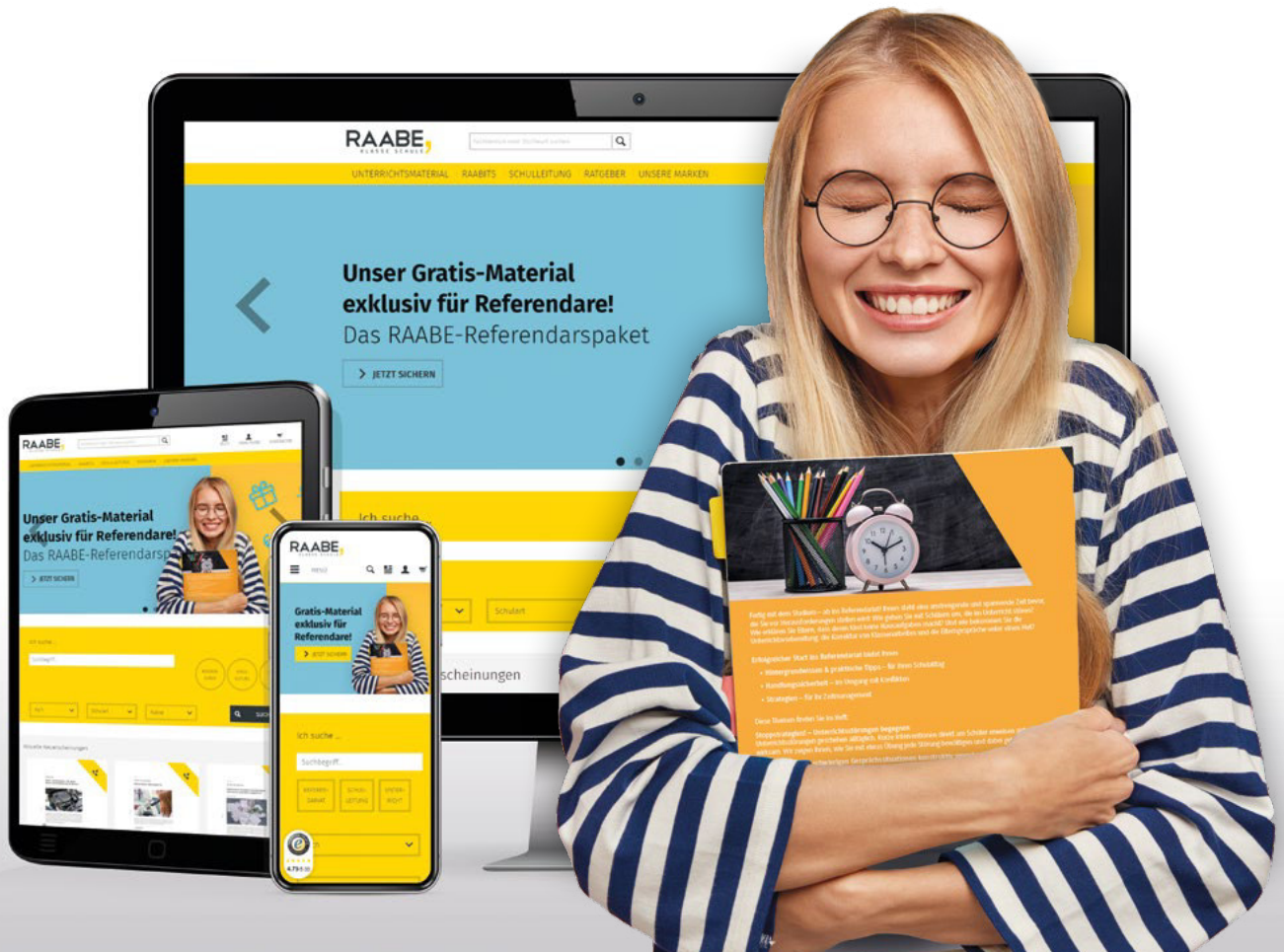
Nun lesen Sie das Ergebnis anhand des Graphen ab und bestimmen alle Variablen.

#### Aufgabe für Experten

- Um welchen Funktionstyp handelt es sich bei der Zielfunktion?
- Welche Werte sind für die Lösung der Aufgabe sinnvoll und welche nicht?

# Sie wollen mehr für Ihr Fach?

## Bekommen Sie: Ganz einfach zum Download im RAABE Webshop.



**Über 4.000 Unterrichtseinheiten**  
sofort zum Download verfügbar



**Sichere Zahlung** per Rechnung,  
PayPal & Kreditkarte



**Exklusive Vorteile für Abonnent\*innen**

- 20% Rabatt auf alle Materialien für Ihr bereits abonniertes Fach
- 10% Rabatt auf weitere Grundwerke



**Käuferschutz** mit Trusted Shops



Jetzt entdecken:  
**www.raabe.de**