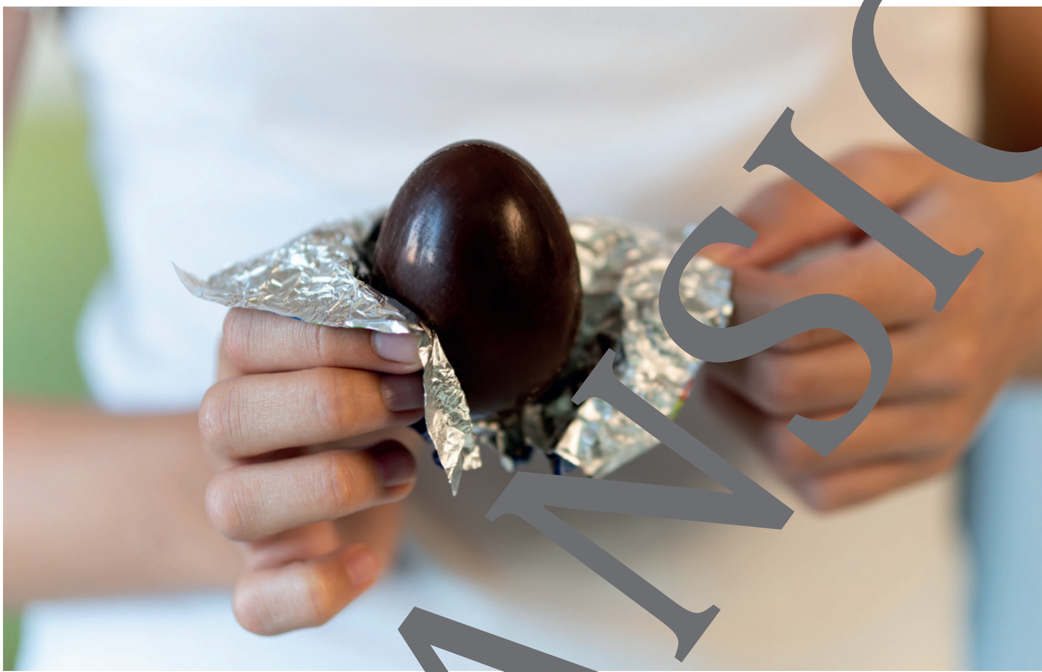
II.C.27

Stochastik

Binomialverteilung und Standardabweichung im Kontext von Überraschungseiern

Jennifer Knellesen



© Diy13/iStock/Getty Images Plus

Die Unterrichtsreihe für die Oberstufe des Mathematikunterrichts zur Binomialverteilung und Standardabweichung beschäftigt sich mit der Binomialverteilung als Modell zur Berechnung von Wahrscheinlichkeiten und der Standardabweichung als zentrales Maß für die Streuung von Daten. Durch praxisnahe mathematische Experimente und Simulationen machen Sie das theoretische Wissen für Ihre Klasse greifbar und die Lernenden festigen es nachhaltig. Mit dieser methodisch abwechslungsreichen Reihe fördern Sie nicht nur das mathematische Verständnis, sondern auch das analytische Denken und Problemlösen.

KOMPETENZPROFIL

GeoGebra

Klassenstufe:	Sek. II
Dauer:	10–12 Unterrichtsstunden
Kompetenzen:	mathematisch argumentieren (K1), Probleme mathematisch lösen (K2), mathematisch modellieren (K3), mathematische Darstellungen verwenden (K4), kommunizieren (K6)
Inhalt:	Binomialverteilung, Standardabweichung, Erwartungswert, Baumdiagramm, Parameter, Pfadregeln, kumulierte Wahrscheinlichkeit

Auf einen Blick

Planung für 6 Doppelstunden

Einstieg

Thema: **Problemstellung**

M 1 Überraschungseier – In jedem 7. Ei

Benötigt:
- ☐ OH-Projektor bzw. Beamer/Whiteboard
- ☐ Folienkopie bzw. digitale Fassung von M 1

Erarbeitung

Thema: **Entwicklung und Durchführung eines mathematischen Experiments**

M 2 Simulation von „In jedem 7. Ei“

Benötigt:
- ☐ Materialien zur Plakaterstellung (Pap[illegible] etc.)

Thema: **Mit Baumdiagrammen zur Binomialverteilung**

M 3 Einführung in die Binomialverteilung

Thema: **Wahrscheinlichkeiten berechnen**

M 4 Kumulierte Wahrscheinlichkeiten – mehr oder weniger

Benötigt:
- ☐ GeoGebra, PC oder Tablet

Thema: **Die Binomialverteilung verstehen**

M 5 Die Parameter n und p in der Binomialverteilung

Benötigt:
- ☐ GeoGebra, PC oder Tablet

Übung

Thema: **Wahrscheinlichkeiten mit der Binomialverteilung bestimmen**

M 6 Wahrscheinlichkeiten bestimmen

Benötigt:
- ☐ ggf. für LearningApp: Handy/Tablet/PC

Erarbeitung

Thema: **Kennzahlen der Binomialverteilung**

M 7 Erwartungswert und Standardabweichung

Benötigt: ☐ GeoGebra, PC oder Tablet

Lernerfolgskontrolle

Thema: **Zusammenführung der Erkenntnisse über die Binomialverteilung**

M 8 Stellungnahme zum Werbeslogan

Einstieg: Überraschungseier – In jedem 7. Ei

M 1

Bildquellen: Logo Kinder Überraschung © Ferrero Deutschland GmbH; Überraschungseier © Ekaterina79/iStock Editorial/ Getty Images Plus; Kind mit Ei © [illegible]3/iStock/Getty Images Plus; Gemüsefiguren © Olga Naumova/iStock/Getty Images Plus, verändert

Aufgabe: Think-Pair-Share

a) **Betrachten** Sie die Bilder und Aussagen.
b) **Ordnen** Sie den Slogan „In jedem 7. Ei" mathematisch **ein**.
c) **Tauschen** Sie sich mit der Person neben Ihnen darüber **aus**.
d) **Diskutieren** Sie in der Klasse.

Erarbeitung: Einführung in die Binomialverteilung

M 3

Aufgabe 1: Öffnen des Überraschungseis

Bernoulli-Experiment
Ein Experiment, bei dem nur zwei Ausgänge („Erfolg“ und „Misserfolg“) möglich sind, nennt man Bernoulli-Experiment.

Begründen Sie, weshalb das Suchen einer bestimmten Spielfigur beim Öffnen eines Überraschungseis ein Bernoulli-Experiment ist.

Aufgabe 2: Baumdiagramm

Sie öffnen mehrere Überraschungseier und suchen dabei nach einer bestimmten Spielfigur, die angeblich in jedem 7. Ei enthalten sein soll. Es soll untersucht werden, wie wahrscheinlich es ist, diese Spielfigur zu bekommen, wenn ein, zwei oder sogar drei Überraschungseier geöffnet werden.

a) **Erstellen** Sie ein Baumdiagramm für den Fall, dass ein Überraschungsei geöffnet wird. **Ermitteln** Sie die folgenden Wahrscheinlichkeiten:
   I. Wahrscheinlichkeit, dass die gesuchte Spielfigur in dem einen Überraschungsei zu finden ist.
   II. Wahrscheinlichkeit, dass die gesuchte Spielfigur in dem einen Überraschungsei nicht zu finden ist.

b) **Erstellen** Sie ein Baumdiagramm für den Fall, dass zwei Überraschungseier geöffnet werden. Gehen Sie bei der Versuchsanordnung davon aus, dass [illegible] Sammelfiguren der Reihe als eine Sammelfigur angesehen werden.
   Ermitteln Sie die folgenden Wahrscheinlichkeiten:
   I. Wahrscheinlichkeit, dass die gesuchte Spielfigur nur in dem ersten Überraschungsei gefunden wird.
   II. Wahrscheinlichkeit, dass die gesuchte Spielfigur nur in dem zweiten Überraschungsei gefunden wird.
   III. Wahrscheinlichkeit, dass die gesuchte Spielfigur in beiden Überraschungseiern gefunden wird.
   IV. Wahrscheinlichkeit, dass die gesuchte Spielfigur in einem der beiden Überraschungseier gefunden wird.

c) **Zeichnen** Sie ein Baumdiagramm für den Fall, dass drei Überraschungseier geöffnet werden. **Ermitteln** Sie die folgenden Wahrscheinlichkeiten:
   I. Wahrscheinlichkeit, dass die gesuchte Spielfigur in genau einem der drei Überraschungseier gefunden wird.
   II. Wahrscheinlichkeit, dass die gesuchte Spielfigur in genau zwei der drei Überraschungseiern gefunden wird.
   III. Wahrscheinlichkeit, dass die gesuchte Spielfigur in keinem der drei Überraschungseiern gefunden wird.
   IV. Wahrscheinlichkeit, dass die gesuchte Spielfigur in allen drei Überraschungseiern gefunden wird.

d) **Stellen** Sie eine allgemeine Regel zur Bestimmung der Wahrscheinlichkeit für den Fall **auf**, dass bei *n* geöffneten Überraschungseiern die gesuchte Figur genau einmal zu finden ist.

M 4 Erarbeitung: Kumulierte Wahrscheinlichkeiten – Mehr oder weniger

Aufgabe 1: Weniger als k Erfolge

a) **Öffnen** Sie die GeoGebra-Datei https://raabe.click/ggb-IIC27-M4-A1.

Setzen Sie die Parameter $n = 10$ und $p = \frac{1}{7}$.

Betrachten Sie sich die graphische Darstellung von „weniger als 3 Erfolge".

b) **Ermitteln** Sie rechnerisch die Wahrscheinlichkeit für weniger als 3 Erfolge.

c) **Formulieren** Sie eine allgemeine Regel zur Berechnung der Wahrscheinlichkeit für weniger als k Erfolge.

Aufgabe 2: Mehr als k Erfolge

a) **Öffnen** Sie die GeoGebra-Datei https://raabe.click/ggb-IIC27-M4-A2.

Setzen Sie die Parameter $n = 10$ und $p = \frac{1}{7}$.

Betrachten Sie sich die graphische Darstellung von „mehr als 2 Erfolge".

b) **Ermitteln** Sie rechnerisch die Wahrscheinlichkeit für mehr als 2 Erfolge.

c) **Formulieren** Sie eine allgemeine Regel zur Berechnung der Wahrscheinlichkeit für mehr als k Erfolge.

M 5 Erarbeitung: Die Parameter n und p in der Binomialverteilung

Aufgabe 1: Verständnis von n – Anzahl der Versuche

1. **Öffnen** Sie die GeoGebra-Datei https://raabe.click/ggb-IIC27-M5.
   Setzen Sie die Parameter $p = 0{,}3$ und $k = 2$.
2. **Verändern** Sie mit dem Schieberegler den Wert von n.
   Veranschaulichen und **beschreiben** Sie, wie sich die Form des Graphen und die Lage der Verteilung verändert, wenn n größer wird.

Aufgabe 2: Verständnis von p – Erfolgswahrscheinlichkeit

1. **Öffnen** Sie die GeoGebra-Datei https://raabe.click/ggb-IIC27-M5.
   Setzen Sie die Parameter $n = 20$ und $k = 2$.
2. **Verändern** Sie mit dem Schieberegler den Wert von p.
   Veranschaulichen und **beschreiben** Sie, wie sich die Form des Graphen und die Lage der Verteilung bei kleinen, mittleren und großen p verändert.

Übung: Wahrscheinlichkeiten bestimmen

M 6

Aufgabe 1

Ordnen Sie den Wahrscheinlichkeiten die passende Berechnungsformel **zu**.

$P(X=3)$	$\binom{9}{4} \cdot (0{,}2)^4 \cdot (0{,}8)^5$
$P(X=2)$	$\binom{12}{5} \cdot (0{,}5)^5 \cdot (0{,}5)^7$
$P(X=5)$	$\binom{8}{2} \cdot (0{,}7)^2 \cdot (0{,}3)^6$
$P(X=4)$	$\binom{10}{3} \cdot (0{,}4)^3 \cdot (0{,}6)^7$

Alternativ können Sie die Aufgabe auch als LearningApp bearbeiten: https://learningapps.org/watch?v=pojh2ot9525.

Aufgabe 2

Ordnen Sie der Wahrscheinlichkeit den richtigen Wert **zu**.

$P(X=3)$ bei $n = 10$; $p = 0{,}4$	$P(X=1)$ bei $n = 5$; $p = 0{,}6$	$P(X=$[illegible]$)$ bei $n = 8$; $p = 0{,}3$	$P(X=$[illegible]$)$ bei $n = 6$; $p = 0{,}7$

0,08	0,21	0,33	0,30

Alternativ können Sie die Aufgabe auch als LearningApp bearbeiten: https://learningapps.org/watch?v=pevi6wtwk25.

Aufgabe 3

Ordnen Sie den Wahrscheinlichkeiten die passende Berechnungsformel **zu**.

$P(X<3)$	$P(X=0) + P(X=1) + P(X=2) + P(X=3)$
$P(X<4)$	$P(X=0) + P(X=1)$
$P(X<2)$	$P(X=0) + P(X=1) + P(X=2) + P(X=3) + P(X=4)$
$P(X<5)$	$P(X=0) + P(X=1) + P(X=2)$

Alternativ können Sie die Aufgabe auch als LearningApp bearbeiten: https://learningapps.org/watch?v=p7a[illegible]

Aufgabe 4

Ordnen Sie den Wahrscheinlichkeiten die passende Berechnungsformel **zu**.

$P(X>3)$	$1 - P(X=0) - P(X=1) - P(X=2) - P(X=3) - P(X=4)$
$P(X>4)$	$1 - P(X=0) - P(X=1) - P(X=2) - P(X=3)$
$P(X>2)$	$1 - P(X=0) - P(X=1) - P(X=2) - P(X=3) - P(X=4) - P(X=5)$
$P(X>5)$	$1 - P(X=0) - P(X=1) - P(X=2)$

Alternativ können Sie die Aufgabe auch als LearningApp bearbeiten: https://learningapps.org/watch?v=pejh4vznn25.