

I.C.75

Algebra

Einführung in die quadratischen Funktionen anhand der Scheitelpunktform

Stephan Ziemer



Quadratische Funktionen bilden eine wichtige Funktionengruppe in der Schulmathematik. In dieser Einheit erarbeiten sich die Lernenden nach einem lebensweltbezogenen Einstieg, die Untersuchung des Bremswegs eines Autos anhand einer Wertetabelle den Graphen der Normalparabel und Eigenschaften in Abhängigkeit zur linearen Funktion. Anschließend entdecken sie vertiefend die Transformationen (Strecken, Stauchen, Spiegeln, Verschieben entlang der x - und y -Achse) quadratischer Funktionen in der Scheitelpunktform. Dies erfolgt unter besonderer Berücksichtigung des Einsatzes des GTRs.

KOMPETENZBEFELD

Klassenstufe:

8–10

Dauer:

12 Unterrichtsstunden (Minimalplan 6)

Inhalt:

quadratische Funktionen, Wertetabellen, Graphen, Gleichungen, Anwendungsaufgaben, Parameter, Streckung, Stauchung, Spiegelung, Verschiebung

Kompetenzen:

mathematisch argumentieren (K1), Probleme mathematisch lösen (K2), mathematisch modellieren (K3), mathematische Darstellungen verwenden (K4), kommunizieren (K6)

Auf einen Blick

Planung für 12 Stunden

Einstieg

Thema:	Quadratische Funktionen kennenlernen
M 1	„Knappe Kiste!“ – Bremsweg eines Autos
M 2	Quadratische Funktionen – Definition, Beispiele, Übung

Erarbeitung 1

Thema:	Die Normalparabel und Transformationen der Normalparabel
M 3	Die Normalparabel
M 4	„Strecken, Stauchen und Spiegeln“ – Einstieg
M 5	„Strecken, Stauchen und Spiegeln“ – Hilfekarten und Zusatzaufgabe

Übung 1

Thema:	Transformationen der Normalparabel
M 6	„Strecken, Stauchen und Spiegeln“ – Übung

Erarbeitung 2

Thema:	Die Normalparabel und Transformationen der Normalparabel
M 7	„Verschieben entlang der y -Achse“ – Einstieg
M 8	„Verschieben entlang der y -Achse“ – Hilfekarten und Zusatzaufgabe

Übung 2

Thema:	Transformationen der Normalparabel
M 9	„Verschieben entlang der y -Achse“ – Übung

Erarbeitung 3

Thema:	Die Normalparabel und Transformationen der Normalparabel
M 10	„Verschieben entlang der x -Achse“ – Einstieg
M 11	„Verschieben entlang der x -Achse“ – Hilfekarten und Zusatzaufgabe

Übung 3

Thema: Transformationen der Normalparabel

M 12 „Verschieben entlang der x-Achse“ – Übung

Ergebnissicherung 1

Thema: Quadratische Funktionen in der Scheitelpunktform

M 13 Die Scheitelpunktform – Einstieg

M 14 Die Scheitelpunktform – Übung

Übung 4

Thema: Transformationen der Normalparabel

M 15 Die Scheitelpunktform – Vertiefende Übung

Ergebnissicherung 2

Thema: Quadratische Funktionen in der Scheitelpunktform

M 16 Die Scheitelpunktform – Hilfekarten zu M 14 und M 15 und Zusatzaufgabe

Lernerfolgskontrolle

M 17 Lernerfolgskontrolle – Quadratische Funktionen

Minutenplan

Die Zeit ist knapp! Dann planen Sie die Unterrichtseinheit für sechs Stunden mit den folgenden Inhalten:

- M 2 Quadratische Funktionen
- M 3 Normalparabel
- M 4/M 5, M 7/M 8, Erarbeitung der Transformationen
- M 9/M 10/M 11 Scheitelpunktform
- M 12, M 13, M 14, M 15, M 16, M 17 Lernerfolgskontrolle

„Knappe Kiste!“ – Bremsweg eines Autos

M 1

Stelle dir folgende Situation im Straßenverkehr vor: Ein Autofahrer fährt mit 50 km/h in der Stadt, als ein Kind plötzlich auf die Straße läuft. Der Autofahrer bremst sofort und kommt genau vor dem Kind zum Stehen.



© Adam Gault/Photodisc

Leitfrage: Um wie viel Meter verlängert sich der Bremsweg, wenn das Auto 70 km/h gefahren wäre?

Aufgabe 1

Schätze die Antwort zur Leitfrage: _____

Aufgabe 2

Um die Leitfrage zu beantworten, muss man wissen, wie die Geschwindigkeit x und Bremsweg $f(x)$ zusammenhängen:

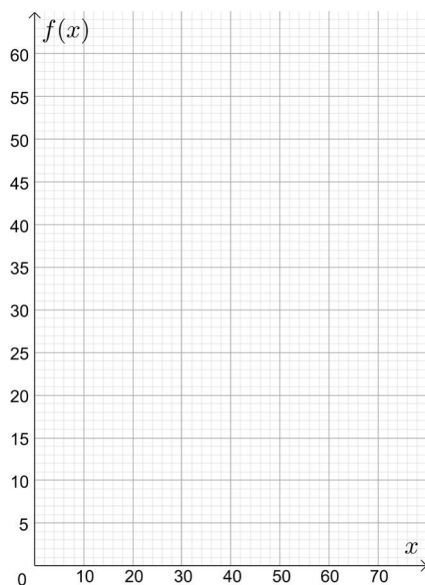
Es gilt: $f(x) = \frac{1}{100}x^2$

Fülle die Wertetabelle aus:

Geschwindigkeit x in km/h		10	20	30	40	50	60	70
Bremsweg $f(x)$ in m								

Aufgabe 3

Zeichne mit dieser Wertetabelle den Funktionsgraphen:

**Aufgabe 4**

Beantworte mit Hilfe des Graphen die Leitfrage:

Aufgabe 5

Notiere, wie sich der Funktionssterm und der Graph der Funktion f mit $f(x) = \frac{1}{100}x^2$ von den Funktionen, die du bislang kennst, unterscheidet.



Sieh dir den Graphen an.

Beschreibe, was du durch Ablesen herausfinden kannst, wie schnell das ursprünglich 70 km/h schnelle Auto noch ist, wenn es beim Kind ankommt.

M 3

Die Normalparabel

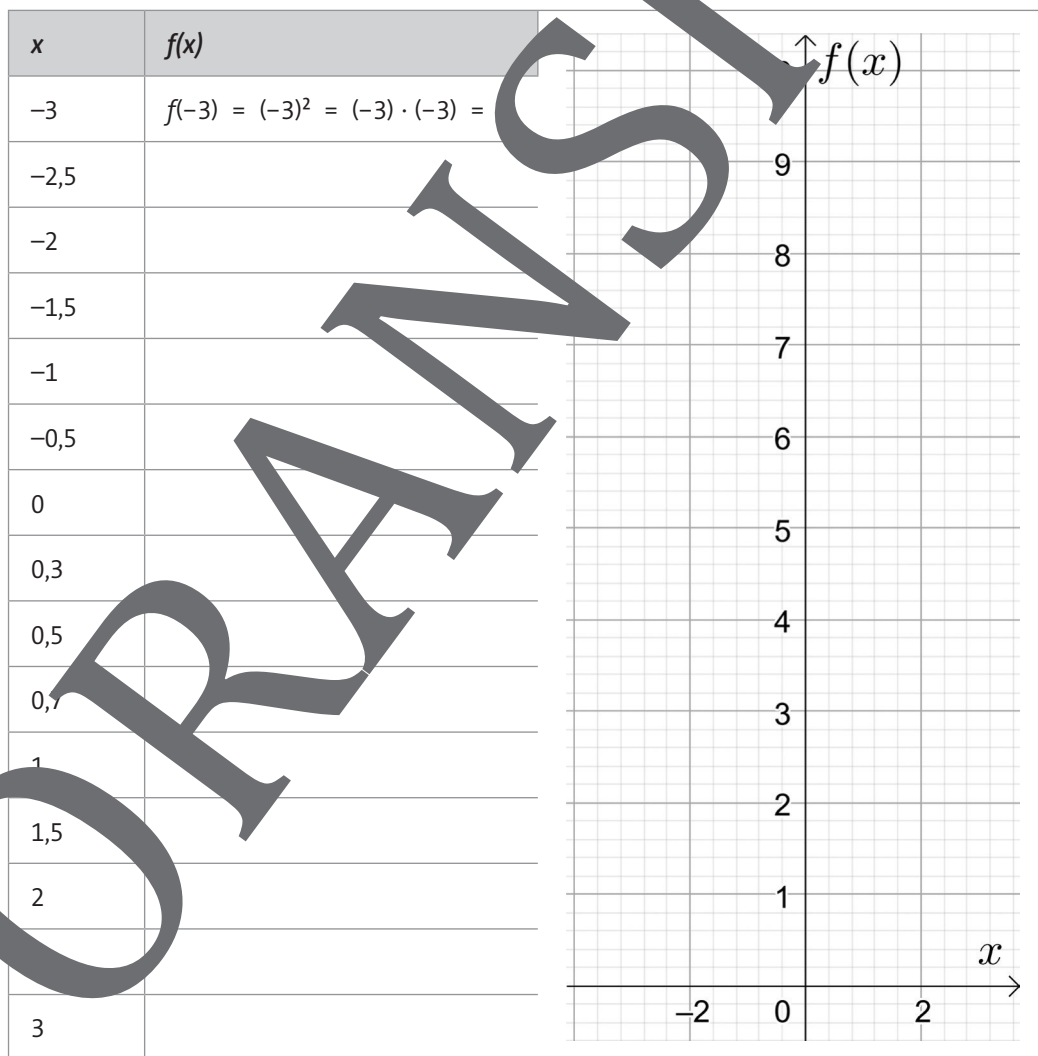
Rückblick: Du hast bereits die linearen Funktionen mit der Funktionsgleichung $y = m \cdot x$ kennengelernt. Dabei hast du insbesondere gelernt, welche Bedeutung die Variablen b und m für den Funktionsgraphen, der für lineare Funktionen „Gerade“ heißt, haben.

Das ist neu: Nun hast du mit den quadratischen Funktionen als „Funktionen, die eine x^2 in der Funktionsgleichung haben“, eine neue Art von Funktionen kennengelernt.

„Ganz normal“ – der einfachste Fall: Die einfachste aller quadratischen Funktionen ist die mit der Funktionsgleichung $y = x^2$. Statt y schreibt man übrigens auch $f(x)$; man meint damit „eine Funktion, die abhängig von der Variablen x ist“, und liest $f(x)$ als „f von x“. Also statt $y = x^2$ nun $f(x) = x^2$.

Aufgabe

Fülle die Wertetabelle zu Ende **aus** und **zeichne** die Punkte ins Koordinatensystem.



Fachbegriffe:

Der Graph einer quadratischen Funktion heißt Parabel.

Da die Funktion $f(x) = x^2$ besonders einfach – sozusagen „ganz normal“ – ist, hat ihr Funktionsgraph einen eigenen Namen: Man nennt ihn **Normalparabel**.

Ausblick:

Es gibt natürlich noch weitere quadratische Funktionen, wie die mit den Funktionsgleichungen $f(x) = 2x^2$, $g(x) = \frac{1}{2}x^2$ oder auch $h(x) = -x^2$. Das heißt allgemein: Jede Funktion mit einer Funktionsgleichung der Form $f(x) = ax^2$ ($a \neq 0$) ist ebenfalls eine quadratische Funktion. Alle Funktionsgraphen haben ebenfalls eine Parabelform, aber natürlich unterscheiden sie sich von der Normalparabel; die Frage ist: Wie?!

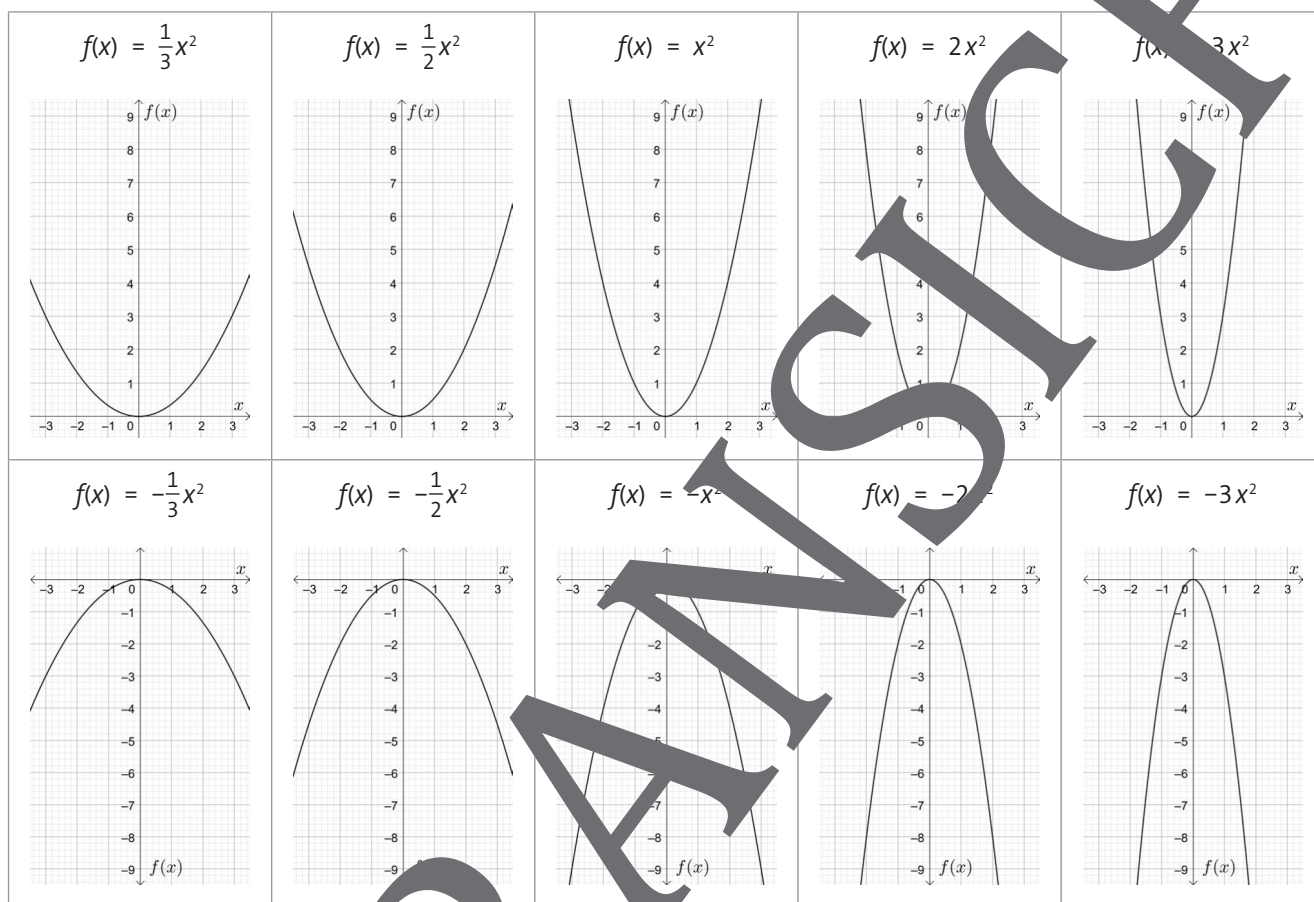
M 4

„Strecken, Stauchen und Spiegeln“ – Einstieg

Frage: Welche Bedeutung hat der Vorfaktor a in $f(x) = ax^2$ für den Funktionsgraphen?

Aufgabe

Vergleiche die nachfolgenden Funktionen (mit ihren Funktionsgleichungen und Funktionsgraphen) mit der Normalparabel ($f(x) = x^2$) und auch untereinander und formuliere jeweils mit eigenen Worten Regeln für die Bedeutung des Vorfaktors a in $f(x) = ax^2$.



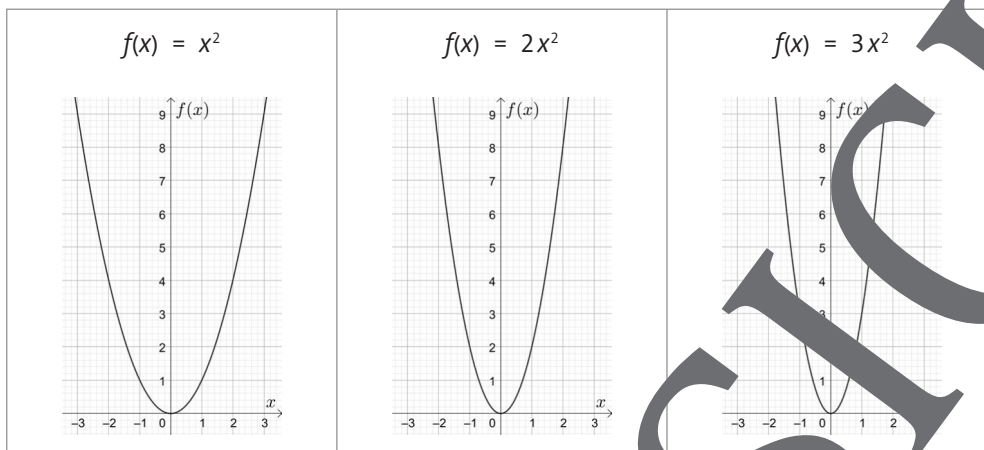
Regeln:

„Strecken, Stauchen und Spiegeln“ – Hilfekarten und Zusatzaufgabe

M 5

Hilfekarte 1

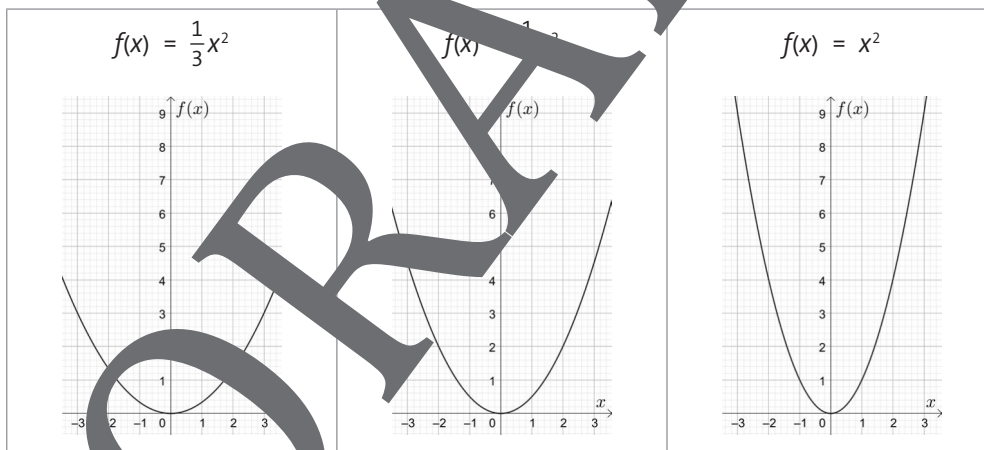
Betrachte zunächst nur die nachfolgenden Funktionsgleichungen und Graphen:



Wie du siehst, wird der Vorfaktor vor dem x^2 von links nach rechts immer größer. Welche Entwicklung bewirkt der zunehmende Vorfaktor beim Graphen?

Hilfekarte 2

Betrachte zunächst nur die nachfolgenden Funktionsgleichungen und Graphen:



Wie du siehst, wird der Vorfaktor vor dem x^2 von rechts nach links immer kleiner. Welche Entwicklung bewirkt der zunehmende Vorfaktor beim Graphen?



Hilfekarte 3

Vergleiche nun die obere Reihe von Funktionsgleichungen und Graphen mit der unteren Reihe. Wie du siehst, unterscheidet sich der Vorfaktor vor dem x^2 jeweils nur durch ein Minuszeichen. Welche Auswirkung hat dies auf den Graphen?



Zusatzaufgabe

Eine quadratische Funktion der Form $f(x) = ax^2$ geht durch den Punkt $P(3 | -18)$.

- Gib begründet an, ob ihr Funktionsgraph im Vergleich zur Normalparabel gestreckt, gestaucht und/oder gespiegelt ist.
- Berechne den Vorfaktor a .



Hilfekarte für Zusatzaufgabe

Überlege/Berechne, durch welchen Punkt die Normalparabel an der Stelle $x = 3$ verläuft, und vergleiche diesen mit $P(3 | -18)$.

Setze dann die Koordinaten von $P(3 | -18)$ in $f(x) = ax^2$ ein und löse die Gleichung.

„Strecken, Stauchen und Spiegeln“ – Übung

M 6

Aufgabe 1

- a) **Gib** jeweils zunächst den Wert für a an und **skizziere** (aus der Hand) die Parabeln der quadratischen Funktionen mit den Funktionsgleichungen in dasselbe Koordinatensystem, in dem die Normalparabel bereits eingezeichnet ist. **Verwende** für jede Parabel eine andere Farbe.

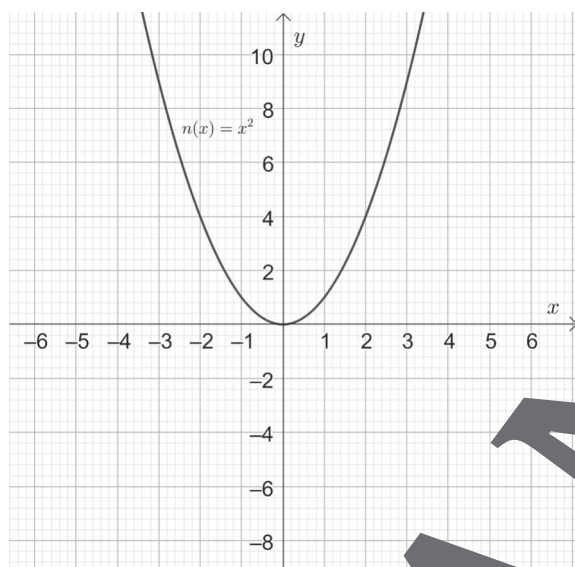
$$f(x) = 8x^2 \rightarrow a =$$

$$g(x) = -2x^2 \rightarrow a =$$

$$h(x) = \frac{1}{10}x^2 \rightarrow a =$$

$$i(x) = -\frac{1}{6}x^2 \rightarrow a =$$

- b) **Überprüfe** deine Ergebnisse mit Hilfe des GTRs. (Graph-Menü: Graphen zeichnen lassen)



Aufgabe 2

- a) **Gib** jeweils eine Funktionsgleichung einer quadratischen Funktion der Form $f(x) = ax^2$ an, die im Vergleich zur Normalparabel

1. "nur" gestreckt ist.
2. "nur" gestaucht ist.
3. "nur" nach unten geöffnet ist.
4. nach unten geöffnet und gestreckt ist.
5. nach unten geöffnet und gestaucht ist.

- b) **Kontrolliere** deine Ergebnisse mit Hilfe des GTRs. (Graph-Menü: Graphen zeichnen lassen)

Parabelturnen ("ergizer")

Alle stehen sich hintereinander und heben beide Arme nach oben über den Kopf und formen so eine Normalparabel.

Man nennt die Lehrkraft oder aber auch die Lernenden als Meldekette die Funktionsgleichung einer quadratischen Funktion der Form $f(x) = ax^2$.

Ist die Parabel im Vergleich zur Normalparabel

- gestreckt → Arme enger zusammen
- gestaucht → Arme weiter auseinander
- gespiegelt → Arme nach unten

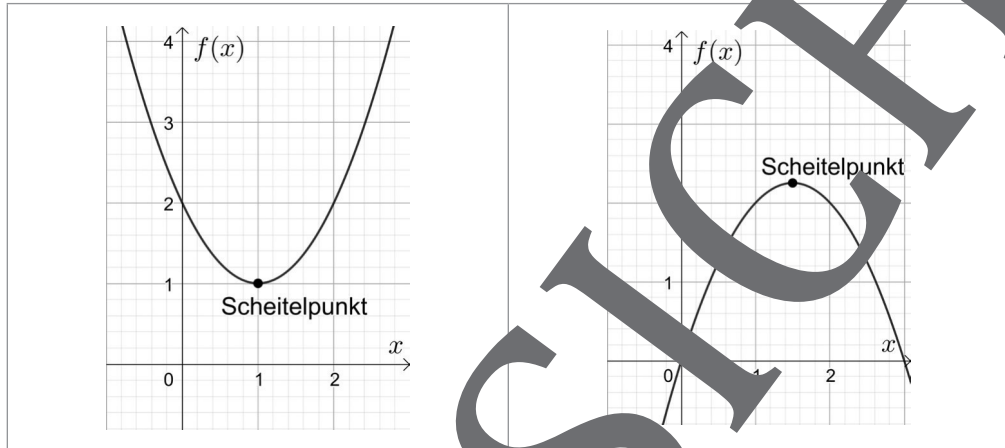
M 13

Die Scheitelpunktform – Einstieg

Definitionen:

a) Scheitelpunkt

Der Scheitelpunkt ist bei einer nach oben geöffneten Parabel der Punkt mit dem kleinsten y -Wert („der tiefste Punkt der Parabel“ bzw. bei einer nach unten geöffneten Parabel entsprechend der Punkt mit dem größten y -Wert („der höchste Punkt der Parabel“).



b) Scheitelpunktform

Bei einer quadratischen Funktion der Form $f(x) = a(x - d)^2 + e$ kann man den Scheitelpunkt $S(d | e)$ direkt ablesen. Daher heißt diese Darstellungsform einer quadratischen Funktion – es gibt noch zwei weitere Darstellungsformen – Scheitelpunktform.

Aufgabe

Notiere bei den jeweiligen Funktionsgleichungen jeweils den Scheitelpunkt und **skizziere** die verschobenen Normalparabeln im Koordinatensystem in unterschiedlichen Farben.

$$f(x) = (x - 3)^2 + 2$$

$$g(x) = (x + 1)^2 - 4$$

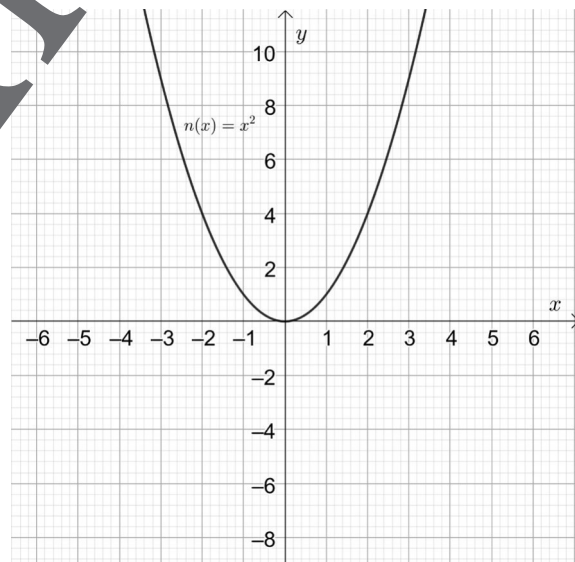
$$h(x) = (x + 2)^2 + 1$$

$$i(x) = (x + 1)^2 - 1$$

$$j(x) = (x - 2)^2 - 2$$

$$k(x) = x^2$$

$$l(x) = 2x^2$$



Die Scheitelpunktform – Übung

M 14

Aufgabe 1

Fülle die nachfolgende Tabelle aus. (Kontrolliere anschließend mit dem GTR)

Funktion	Scheitel-punkt	Verschiebung entlang der x-Achse	Verschiebung entlang der y-Achse	Formveränderung (gestreckt/gestaut)	Spiegelung an Achse
$f(x) = (x - 5)^2$					
$g(x) = x^2 + 3$					
$h(x) = 2x^2$					
$i(x) = 0,7x^2$					
$j(x) = -x^2$					
$k(x) = (x - 4)^2 + 6$					
$l(x) = 2(x + 1)^2$					
$m(x) = -3x^2 - 4$					
$n(x) = 0,5(x - 2)^2 + 3$					

Aufgabe 2

Gib jeweils eine mögliche Funktionsgleichung einer quadratischen Funktion in der Scheitelpunktform $f(x) = a(x - d)^2 + e$ an, die die folgenden Eigenschaften besitzt:

- Normalparabel mit Scheitelpunkt $S(2 | 3)$
- Normalparabel mit Scheitelpunkt $S(-1 | -4)$
- Scheitelpunkt $S(-1 | 2)$ und gestreckt
- Scheitelpunkt $S(1 | 5)$ und gestaut
- Normalparabel mit Scheitelpunkt $S(0 | 2)$ und an x-Achse gespiegelt
- Scheitelpunkt $S(1 | 0)$ und gestaut

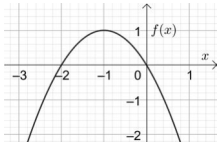
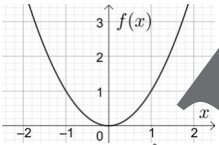
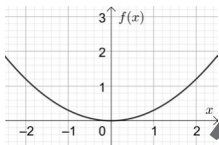
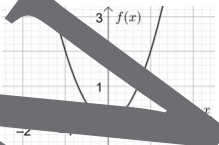
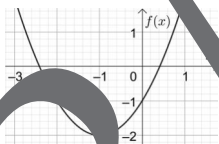
Aufgabe 3

Skizziere die Normalparabel und die Graphen der nachfolgenden Funktionen in unterschiedlichen Farben in ein Koordinatensystem mit Achsen $-5 < x < 5$, $-8 < y < 8$.

$$f(x) = -5(x - 2)^2 + 1 \quad g(x) = 3(x + 1)^2 - 1 \quad h(x) = -(x - 1)^2 - 2$$

Aufgabe 3

Schneide die Domino-Steine aus und löse das Domino.

	ENDE	START	Normalparabel
gestaucht	$f(x) = -(x + 1)^2 + 1$		Scheitelpunkt bei $S(1 1)$
$f(x) = -x^2$			Normalparabel an x-Achse gespiegelt
$f(x) = (x - 1)^2 + 1$		Scheitelpunkt bei $S(-1 -2)$	$f(x) = 2x^2$

Mehr Materialien für Ihren Unterricht mit RAAbits Online

Unterricht abwechslungsreicher, aktueller sowie nach Lehrplan gestalten – und dabei Zeit sparen.

Fertig ausgearbeitet für über 20 verschiedene Fächer, von der Grundschule bis zum Abitur: Mit RAAbits Online stehen redaktionell geprüfte, hochwertige Materialien zur Verfügung, die sofort einsetz- und editierbar sind.

- ✓ Zugriff auf bis zu **400 Unterrichtseinheiten** pro Fach
- ✓ Didaktisch-methodisch und **fachlich geprüfte Unterrichtseinheiten**
- ✓ Materialien als **PDF oder Word** herunterladen und individuell anpassen
- ✓ Interaktive und multimediale Lerneinheiten
- ✓ Fortlaufend **neues Material** zu aktuellen Themen



Testen Sie RAAbits Online
14 Tage lang kostenlos!

www.raabits.de

