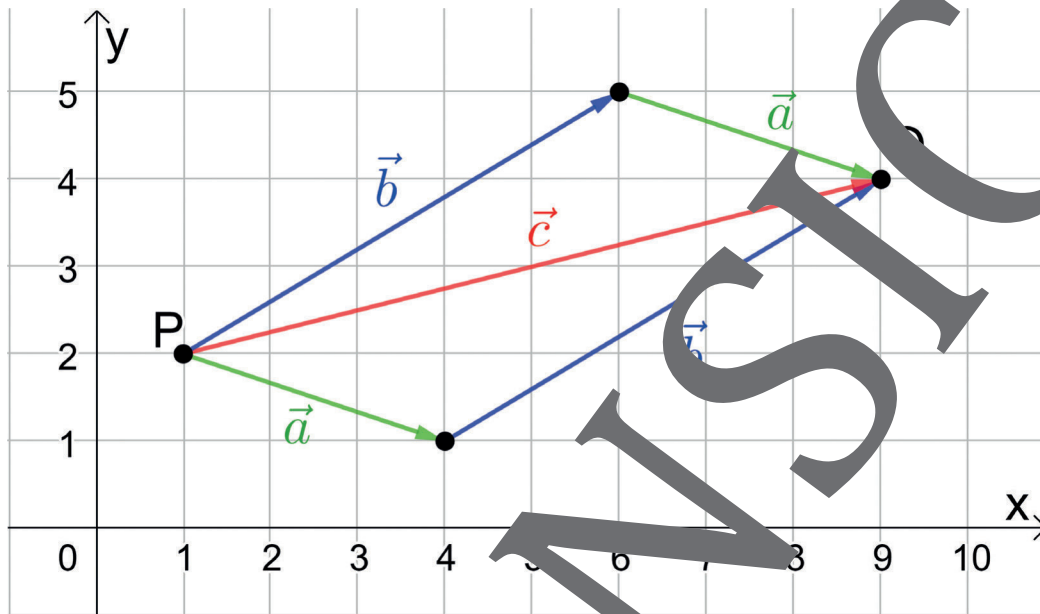


II.B.30

Lineare Algebra und analytische Geometrie

Vektoren und ihre Eigenschaften

Kerstin Langer



Dieses Skript führt Ihre Lernenden wie ein roter Faden durch den Anfangsunterricht der Analytischen Geometrie in der Oberstufe. Sie lernen Vektoren und deren Eigenschaften kennen, rechnen mit Vektoren und überprüfen die lineare Abhängigkeit bzw. Unabhängigkeit von Vektoren. Alle Verfahren sind mit ausführlichen Beispielen beschrieben und bilden ein kompaktes Nachschlagewerk für die kommenden Jahre.

KOMPETENZPROFIL

Klassenstufe: 10–12

Dauer: 14 Unterrichtsstunden (Minimalplan 9)

Kompetenzen: mathematisch argumentieren (K1), Probleme mathematisch lösen (K2), mathematische Darstellungen verwenden (K4), mit symbolischen, formalen und technischen Elementen der Mathematik umgehen (K5)

Inhalt: Vektoren und ihre Eigenschaften, Rechnen mit Vektoren, Addition von Vektoren, Multiplikation mit Skalaren, Lineare Abhängigkeit und Unabhängigkeit

Auf einen Blick

Vorwissen aus der Mittelstufe 1

Thema:	Vorwissen aktivieren
M 1	Schrägbilder von Körpern

Einstieg in die Analytische Geometrie

Thema:	Das dreidimensionale Koordinatensystem
M 2	Vom zwei- zum dreidimensionalen Koordinatensystem
Thema:	Vektoren und ihre Eigenschaften
M 3	Definition und Darstellung von Vektoren
M 4	Wichtige Begriffe zu Vektoren
Thema:	Rechnen mit Vektoren
M 5	Rechnen mit Vektoren
M 6	Rechengesetze
M 7	Vektorzielen, Linearkombinationen von Vektoren

Vorwissen aus der Mittelstufe 2

Thema:	Vorwissen aktivieren
M 8	Lineare Gleichungssysteme: Vorwissen aktivieren
Thema:	Konzept der linearen Abhängigkeit und Unabhängigkeit
M 9	Lineare Gleichungssysteme mit dem Taschenrechner lösen
M 10	Lineare Abhängigkeit und Unabhängigkeit

Lernerfolgskontrolle

Thema:	Wissen differenziert überprüfen
	Aufgaben für eine schriftliche Leistungskontrolle

Minimalplan

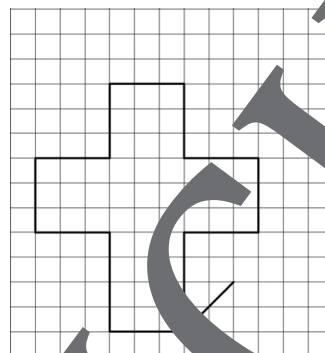
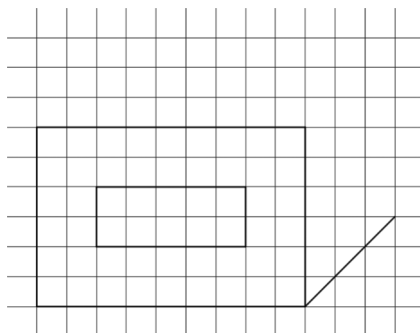
Die Zeit ist knapp? Dann geben Sie die für Ihre Lerngruppe geeigneten Materialien zum häuslichen Durcharbeiten aus und besprechen im Unterricht die aufgetretenen Fragen. Das Zeichnen der Schrägbilder in **M 1** sollte ohne Schwierigkeiten zu Hause durchführbar sein, ebenso die Aufgaben aus **M 2** und **M 3**. Die Herleitung der Rechengesetze in **M 6** können Sie überspringen. Das Wiederholen der Lösungsverfahren von linearen Gleichungssystemen in **M 8** können Sie ebenso in die häusliche Arbeit geben wie die Recherche zur Nutzung des Taschenrechners in **M 9**.

M 1

Vorwissen aktivieren: Schrägbilder von Körpern

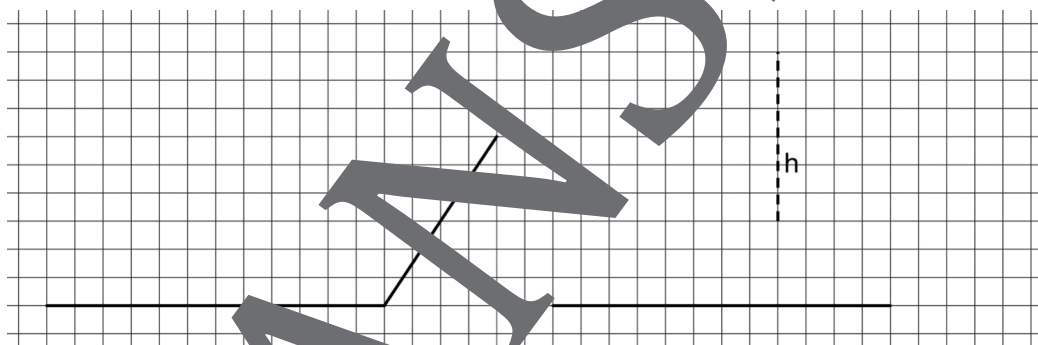
Aufgabe 1

Ergänzen Sie die beiden Schrägbilder.



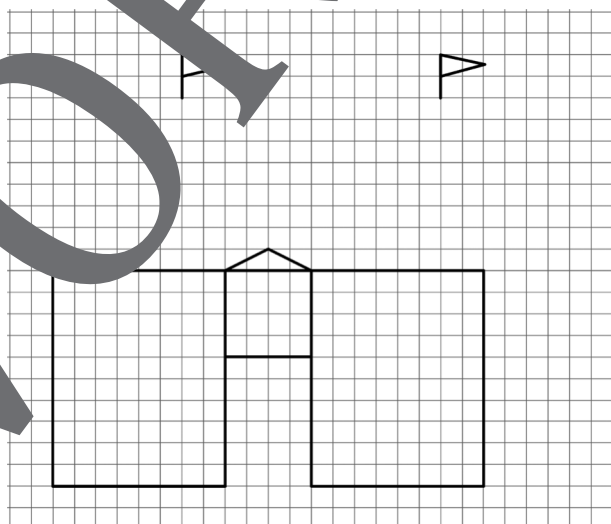
Aufgabe 2

Ergänzen Sie jeweils zu einem Schrägbild einer Pyramide mit quadratischer Grundfläche.



Aufgabe 3

Ergänzen Sie, dass sich ein Schrägbild von einem Schloss mit Tordurchfahrt und zwei pyramidenförmigen Türmdächern ergibt. Die Vorderseite des Schlosses und die Fahnen, die auf den Spitzen der Türme stehen, sind bereits eingezeichnet.



Definition und Darstellung von Vektoren

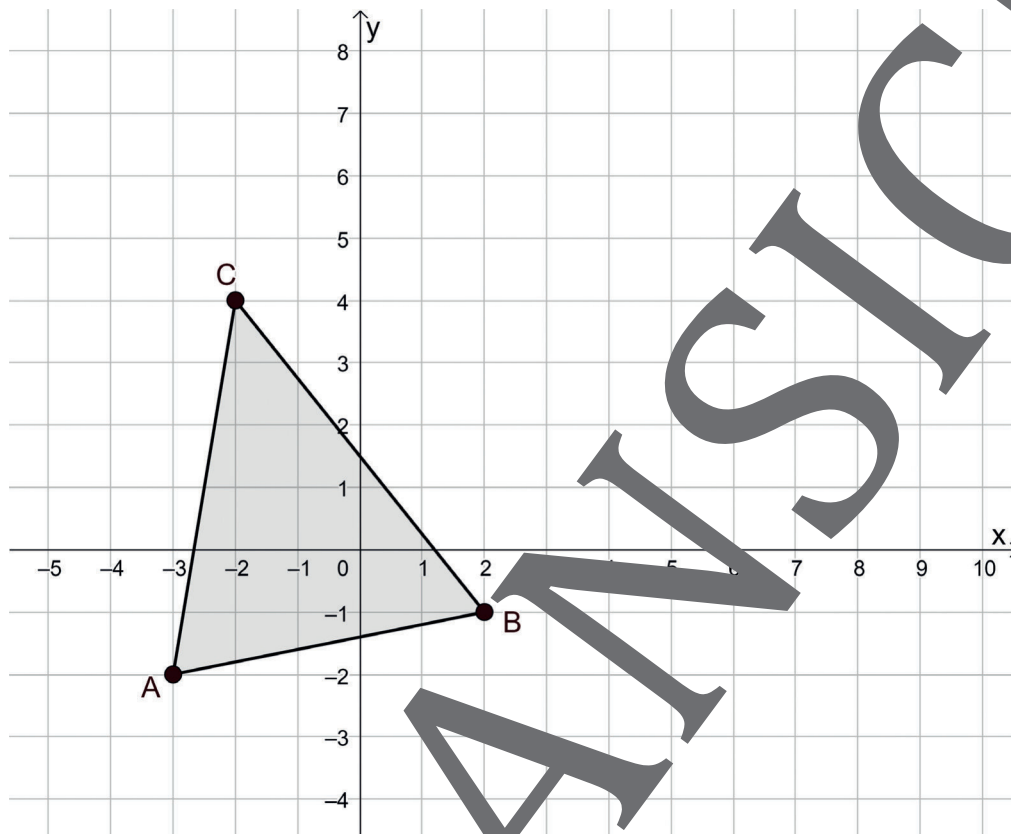
M 3

Sie haben bereits unwissentlich mit Vektoren zu tun gehabt. Nämlich, als Sie Verschiebungen von Figuren durchgeführt haben.

Aufgabe 1

Verschieben Sie das abgebildete Dreieck um 3 Einheiten nach rechts und 3 Einheiten nach oben.

Zeichnen Sie für jeden der Eckpunkte des Dreiecks den Verschiebungspfeil ein.



Alle Punkte der Figur werden in gleicher Weise verschoben. Die Verschiebung ist bereits durch einen der drei eingezeichneten Pfeile eindeutig festgelegt.

Alle Pfeile, die die gleiche Richtung und die gleiche Länge haben, fassen wir in einer Pfeilkategorie zusammen, die wir als **Vektor** bezeichnen.

Vektoren werden entweder mit Kleinbuchstaben oder den Punktnamen von Anfang und Ende bezeichnet und sind mit einem Pfeil versehen, z. B. $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$, $\vec{AA'}$, $\vec{BB'}$, $\vec{CC'}$.

Schreibweisen:

Vektoren in der Ebene:

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$$

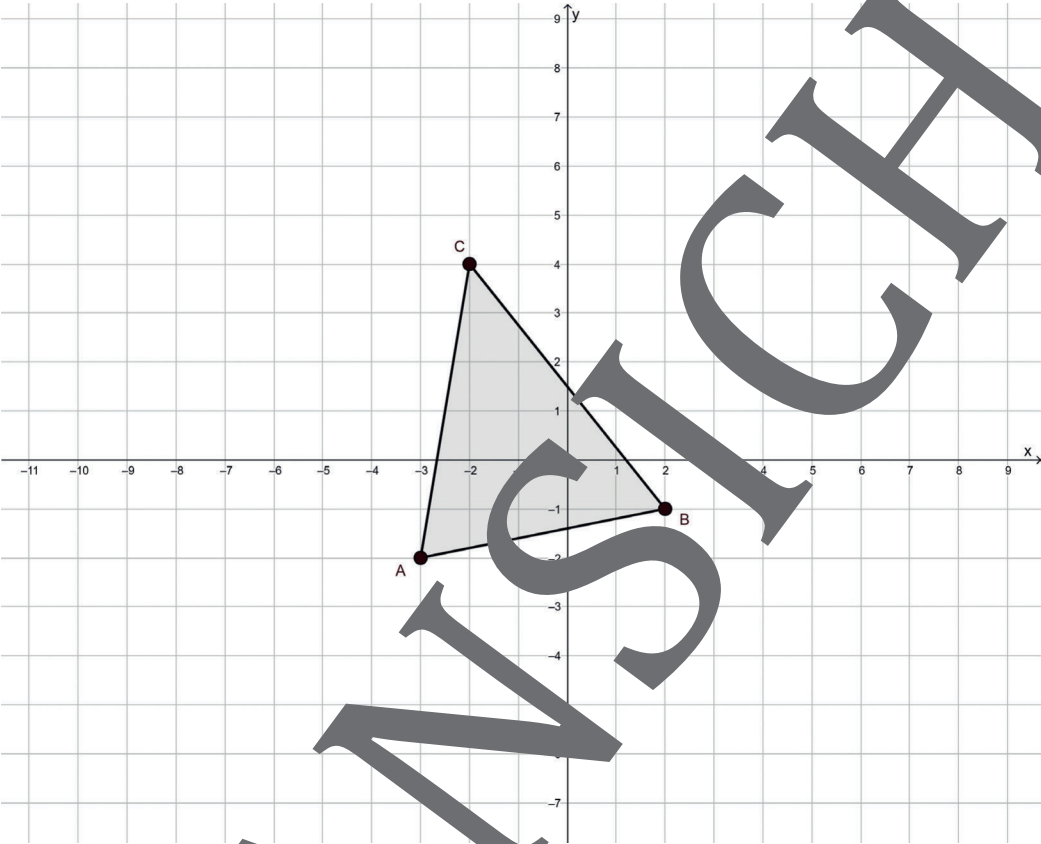
Vektoren im Raum:

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$$

v_1 , v_2 und v_3 heißen Koordinaten des Vektors $\vec{v}$. Sie sind reelle Zahlen und stellen die Verschiebungsanteile in Richtung der x-Achse, y-Achse bzw. der z-Achse dar.



Aufgabe 2
Führen Sie die angegebenen Verschiebungen zeichnerisch durch.
Geben Sie die Koordinaten der jeweiligen Bildpunkte an.
Kontrollieren Sie Ihre Ergebnisse mit GeoGebra.



	A	B	C
Original			
Verschiebung $\begin{pmatrix} 7 \\ 4 \end{pmatrix}$			
Verschiebung $\begin{pmatrix} -4 \\ 1 \end{pmatrix}$			
Verschiebung $\begin{pmatrix} -5 \\ 2 \end{pmatrix}$			
Verschiebung $\begin{pmatrix} 5 \\ -4 \end{pmatrix}$			

Aufgabe 3
Beschreiben Sie, wie Sie rechnerisch die Bildpunkte ermitteln können.

Wichtige Begriffe zu Vektoren

M 4

Vektoren zwischen zwei Punkten: Verbindungsvektoren

Wenn von einem Vektor $\vec{v}$ der Anfangspunkt $P(p_1 | p_2 | p_3)$ und Endpunkt $Q(q_1 | q_2 | q_3)$ bekannt sind, lassen sich die Koordinaten des Vektors ganz einfach durch die Differenz der zugehörigen Koordinaten von P und Q berechnen:

$$\vec{v} = \overrightarrow{PQ} = \begin{pmatrix} q_1 - p_1 \\ q_2 - p_2 \\ q_3 - p_3 \end{pmatrix}$$

Wichtig: „Koordinaten des Endpunkts – Koordinaten des Anfangspunkts“, sonst erhält man den Gegenvektor, der zwar die gleiche Länge, jedoch die entgegengesetzte Richtung besitzt!

Beispiele: $P(7 | 3 | 1)$, $Q(-4 | -1 | 5)$, $R(2 | 0 | 6)$

$$\overrightarrow{PQ} = \begin{pmatrix} -4 - 7 \\ -1 - 3 \\ 5 - 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -11 \\ -4 \\ 4 \end{pmatrix} \quad \overrightarrow{QR} = \begin{pmatrix} 2 - (-4) \\ 0 - (-1) \\ 6 - 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \overrightarrow{RP} = \begin{pmatrix} 7 - 2 \\ 3 - 0 \\ 1 - 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ -5 \end{pmatrix}$$

Ortsvektor eines Punktes

Die Lage eines Punktes im Koordinatensystem lässt sich über einen Vektor beschreiben. Dazu wird der Pfeil $\overrightarrow{OP}$ verwendet, der im Ursprung O startet und in P endet. Dieser Vektor heißt Ortsvektor von P und wird üblicherweise mit $\vec{p}$ bezeichnet. Die Koordinaten des Vektors entsprechen den Koordinaten des zugehörigen Punktes.

Beispiele:

$$A(1 | 1 | 10) \quad B(4 | -3 | -1) \\ \vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 10 \end{pmatrix} \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Betrag eines Vektors

Der Betrag $|\vec{v}|$ eines Vektors $\vec{v}$ ist die Länge der einzelnen Pfeile. Diese lässt sich folgendermaßen berechnen:

$$\text{Für } \vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} \text{ gilt } |\vec{v}| = \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + v_3^2}.$$

Beispiele:

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix} \quad \vec{v} = \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} \\ |\vec{v}| = \sqrt{3^2 + 0^2 + 5^2} = \sqrt{9 + 25} = \sqrt{34} \approx 5,83 \quad |\vec{v}| = \sqrt{(-3)^2 + 0^2 + 4^2} = \sqrt{9 + 16} = \sqrt{25} = 5$$

Aufgabe 1

Gegeben sind die Punkte $P(3 \mid 5 \mid 4)$, $Q(-2 \mid 3 \mid -1)$ und $R(8 \mid -3 \mid -5)$.

Geben Sie die Ortsvektoren von P , Q und R an.

Aufgabe 2

Gegeben sind die Punkte $P(1 \mid 0 \mid -1)$, $Q(-3 \mid 2 \mid 0)$ und $R(4 \mid -2 \mid 3)$.

- Berechnen Sie** die Verbindungsvektoren $\overrightarrow{PQ}$, $\overrightarrow{QR}$, $\overrightarrow{PR}$, $\overrightarrow{QP}$, $\overrightarrow{RQ}$ und $\overrightarrow{RP}$.
- Beschreiben Sie**, was Ihnen dabei auffällt.

Aufgabe 3

Berechnen Sie den Betrag der Vektoren $\vec{u} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\vec{v} = \begin{pmatrix} -4 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix}$ und $\vec{w} = \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \\ -7 \end{pmatrix}$.

Aufgabe 4

Gegeben ist das Dreieck ABC mit $A(2 \mid 5 \mid -4)$, $B(-3 \mid 2 \mid 0)$ und $C(-1 \mid -1 \mid 6)$.

- Geben Sie** die Ortsvektoren von A , B und C an.
- Berechnen Sie** die Verbindungsvektoren, die den Seiten des Dreiecks entsprechen.
- Berechnen Sie** den Umfang des Dreiecks.

Schreiben Sie für die folgenden Aufgaben Ihren Rechenweg kommentiert auf.

Aufgabe 5

Gegeben ist das Dreieck ABC mit $A(5 \mid -2 \mid -1)$, $B(2 \mid -3 \mid 1)$ und $C(7 \mid -4 \mid 3)$.

- Überprüfen Sie**, ob es sich um ein allgemeines, gleichschenkliges oder sogar gleichseitiges Dreieck handelt.
- Ergänzen Sie** einen Punkt D , sodass $ABCD$ ein Parallelogramm ergibt.

Aufgabe 6

Gegeben sind die Punkte $A(-2 \mid 1 \mid -1)$, $B(1 \mid 2 \mid 3)$, $C(2 \mid 2 \mid 8)$ und $D(-1 \mid 3 \mid 4)$.

- Zeigen Sie**, dass das Viereck $ABCD$ ein Parallelogramm ist.
- Überprüfen Sie**, ob es sich bei $ABCD$ auch um eine Raute handelt.
- Berechnen Sie** den Umfang des Vierecks $ABCD$.
- Überprüfen Sie**, ob es sich bei $ABCD$ auch um ein Quadrat handelt.

Aufgabe 7

Gegeben ist ein Quader, der durch die folgenden Vektoren aufgespannt wird:

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ und } \vec{c} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

- Berechnen Sie** das Volumen des Quaders.
- Berechnen Sie** die Länge der Raumdiagonalen.

Aufgabe 8

Die Punkte $P(1 \mid 0 \mid -1)$, $Q(-1 \mid 1 \mid 0)$ und $R(0 \mid -1 \mid 1)$ werden am Ursprung gespiegelt.

Geben Sie die Bildpunkte P' , Q' , R' von P , Q und R an.

Aufgabe 9

Die Punkte $P(-3 \mid 2 \mid 4)$ und $Q(4 \mid -2 \mid 2)$ werden am Punkt $R(2 \mid -3 \mid -1)$ gespiegelt.

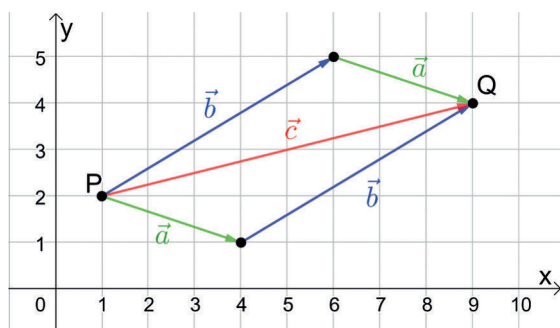
- Berechnen Sie** die Bildpunkte von P und Q .
- Überprüfen Sie**, um was für ein Viereck es sich bei $PQP'Q'$ handelt.

Rechengesetze

M 6

Kommutativgesetz

Für die **Addition** von Vektoren gilt das Kommutativgesetz:



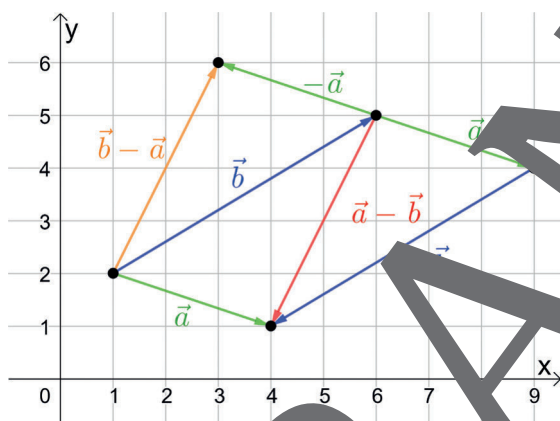
$$\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$$

$$\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Anschaulich lässt sich der Summenvektor $\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$ als Diagonalevektor in dem durch $\vec{a}$ und $\vec{b}$ aufgespannten Parallelogramm betrachten.

Für die **Subtraktion** von Vektoren gilt das Kommutativgesetz nicht:



$$\vec{b} \neq \vec{b} - \vec{a}$$

$$\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Für die **Skalar-Multiplikation** gilt das Kommutativgesetz:

$$\text{I. } r \cdot \vec{a} = \vec{a} \cdot r, r \in \mathbb{R}$$

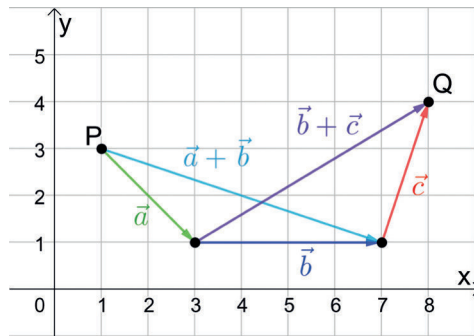
$$3 \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \cdot 3 \\ 3 \cdot (-1) \\ 3 \cdot (-2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ -3 \\ -6 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix} \cdot 3 = \begin{pmatrix} 3 \cdot 3 \\ (-1) \cdot 3 \\ (-2) \cdot 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ -3 \\ -6 \end{pmatrix}$$

$$\text{II. } r \cdot (s \cdot \vec{a}) = (r \cdot s) \cdot \vec{a}, r, s \in \mathbb{R}$$

$$2 \cdot (-3) \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ -4 \\ 5 \end{pmatrix} = -6 \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ -4 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 24 \\ 30 \end{pmatrix} \Leftrightarrow (-3) \cdot 2 \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ -4 \\ 5 \end{pmatrix} = -6 \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ -4 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 24 \\ 30 \end{pmatrix}$$

AssoziativgesetzFür die **Addition** von Vektoren gilt das Assoziativgesetz:

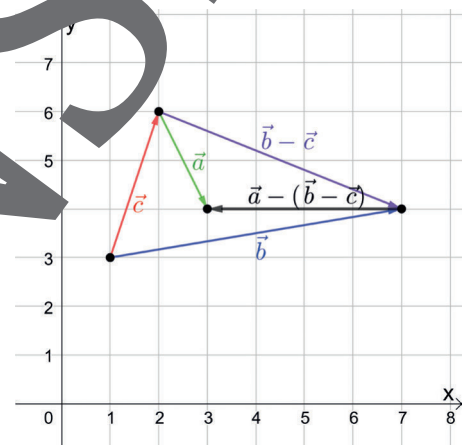
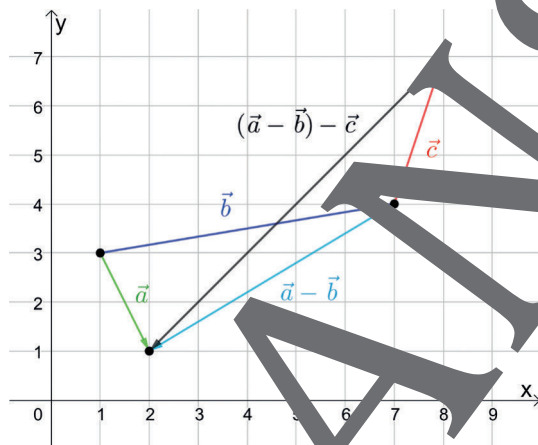
$$(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$$



$$\begin{aligned} \left[\begin{pmatrix} 2 \\ -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \end{pmatrix} \right] + \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 6 \\ -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 1 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \end{pmatrix} + \left[\begin{pmatrix} 4 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} \right] &= \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 1 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 6 \\ -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Für die **Subtraktion** von Vektoren gilt das Assoziativgesetz nicht:

$$(\vec{a} - \vec{b}) - \vec{c} \neq \vec{a} - (\vec{b} - \vec{c})$$



$$\left[\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 6 \\ 1 \end{pmatrix} \right] - \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 \\ -3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -10 \\ -2 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} - \left[\begin{pmatrix} 6 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \end{pmatrix} \right] = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -4 \end{pmatrix}$$

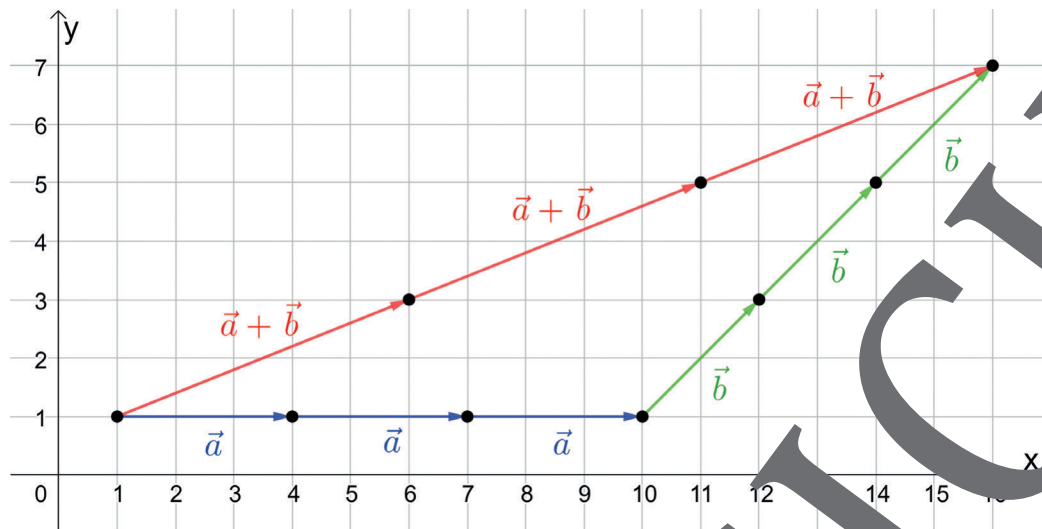
Für die **Skalarmultiplikation** gilt das Assoziativgesetz:

$$(r \cdot s) \cdot \vec{a} = r \cdot (s \cdot \vec{a}), \quad r, s \in \mathbb{R}$$

$$(2 \cdot (-3)) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix} = -6 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 \\ 6 \\ -30 \end{pmatrix}$$

$$2 \cdot \left((-3) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix} \right) = 2 \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 3 \\ -15 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 \\ 6 \\ -30 \end{pmatrix}$$

$$2 \cdot (-3) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix} = -6 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 \\ 6 \\ -30 \end{pmatrix}$$

DistributivgesetzFür die **Skalar-Multiplikation** gelten die Distributivgesetze:

$$r \cdot (\vec{a} + \vec{b}) = r \cdot \vec{a} + r \cdot \vec{b}$$

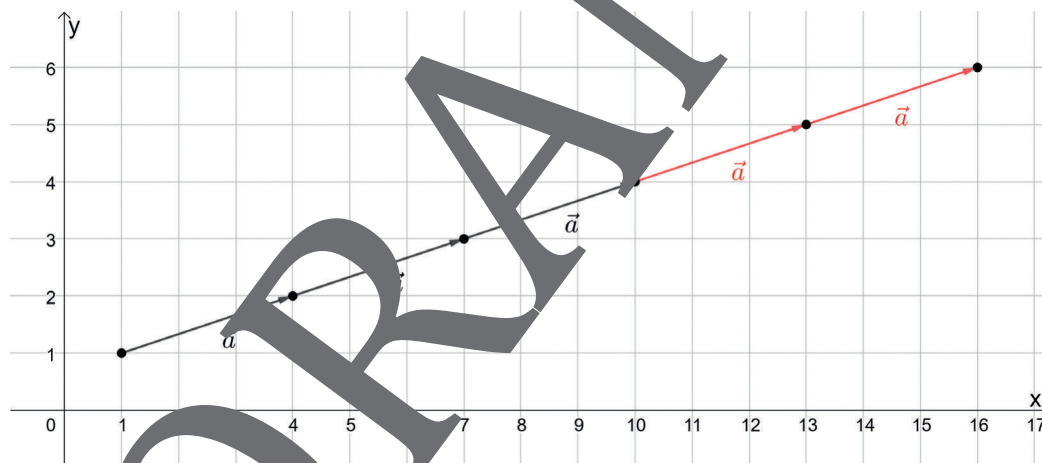
$$3 \cdot \left[\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} \right] = 3 \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15 \\ 6 \end{pmatrix}$$

$$3 \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix} + 3 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 6 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15 \\ 6 \end{pmatrix}$$

$$r \cdot (\vec{a} - \vec{b}) = r \cdot \vec{a} - r \cdot \vec{b}$$

$$3 \cdot \left[\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} \right] = 3 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -6 \end{pmatrix}$$

$$3 \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix} - 3 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 6 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -6 \end{pmatrix}$$



$$(r + s) \cdot \vec{a} = r \cdot \vec{a} + s \cdot \vec{a}$$

$$(3 + 2) \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} = 5 \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15 \\ 5 \end{pmatrix}$$

$$3 \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15 \\ 5 \end{pmatrix}$$

$$(r - s) \cdot \vec{a} = r \cdot \vec{a} - s \cdot \vec{a}$$

$$(3 - 2) \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} = 1 \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$3 \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} - 2 \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Lineare Abhängigkeit und Unabhängigkeit

M 10

Vektoren heißen **linear abhängig**, wenn sich mindestens einer von ihnen als Linearkombination der anderen darstellen lässt. Anderenfalls sind diese Vektoren **linear unabhängig**.

Damit in der Praxis nicht alle Vektoren einzeln überprüft werden müssen, wird der Nullvektor als Linearkombination der zu überprüfenden Vektoren dargestellt.

- ☑ Sie sind linear unabhängig, wenn die einzige Lösung des LGS ist, dass alle Koeffizienten null sind.
- ☑ Sie sind linear abhängig, wenn mindestens eine Lösung des LGS existiert, bei der nicht alle Koeffizienten null sind.

Beispiel: Untersuchen Sie, ob die gegebenen Vektoren linear abhängig oder unabhängig sind.

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{c} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \qquad \vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{c} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Zu bestimmen sind r, s und t , sodass folgende Gleichung erfüllt ist:

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = r \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = r \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Aufstellen des LGS:

$$(I) \quad 0 = s + t$$

$$(II) \quad 0 = r + s$$

$$(III) \quad 0 = r + 2t$$

$$(I) \quad 0 = 2r + 4s - 2t$$

$$(II) \quad 0 = r + t$$

$$(III) \quad 0 = -s + t$$

Der TR gibt folgende Lösung an:

$$r = 0, s = 0, t = 0$$

unendlich viele Lösungen

Da $r = s = t = 0$, sind die Vektoren linear unabhängig.

Da das LGS unendlich viele Lösungen hat, sind die Vektoren linear abhängig.

Besondere Formen der linearen Abhängigkeit

Zwei Vektoren heißen **kollinear**, wenn sie parallel verlaufen und linear abhängig, sodass sich ein Vektor als Vielfaches des anderen darstellen lässt:

$$\begin{pmatrix} 6 \\ 9 \end{pmatrix} = 1,5 \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \end{pmatrix}$$

Drei Vektoren heißen **komplanar**, wenn sie in einer Ebene liegen. Sie sind linear abhängig, sodass sich der Nullvektor als Linearkombination der Vektoren darstellen lässt:

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = -2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Mehr Materialien für Ihren Unterricht mit RAAbits Online

Unterricht abwechslungsreicher, aktueller sowie nach Lehrplan gestalten – und dabei Zeit sparen.

Fertig ausgearbeitet für über 20 verschiedene Fächer, von der Grundschule bis zum Abitur: Mit RAAbits Online stehen redaktionell geprüfte, hochwertige Materialien zur Verfügung, die sofort einsetz- und editierbar sind.

- ✓ Zugriff auf bis zu **400 Unterrichtseinheiten** pro Fach
- ✓ Didaktisch-methodisch und **fachlich geprüfte Unterrichtseinheiten**
- ✓ Materialien als **PDF oder Word** herunterladen und individuell anpassen
- ✓ Interaktive und multimediale Lerneinheiten
- ✓ Fortlaufend **neues Material** zu aktuellen Themen



Testen Sie RAAbits Online
14 Tage lang kostenlos!

www.raabits.de

