

## II.A.52

### Analysis

# Vom Differenzenquotient bis zur geometrischen Anwendung der Ableitung

Kerstin Langer



© Jakob Helbig/Connect Images

Mit dieser Einheit starten Sie voll in die Analysis der Oberstufe. Ihre Lernenden werden mit diesem Skript systematisch über mittlere und lokale Änderungsraten an die Ableitung bis zur Nutzung in geometrischen Zusammenhängen herangeführt. Die mathematischen Herleitungen dürfen natürlich ebenso wenig fehlen wie das graphische Differenzieren!

---

#### KOMPETENZPROFIL

|                      |                                                                                                                                                                                                              |
|----------------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| <b>Klassenstufe:</b> | Sek II                                                                                                                                                                                                       |
| <b>Dauer:</b>        | 13 Unterrichtsstunden (Minimalplan 8)                                                                                                                                                                        |
| <b>Kompetenzen:</b>  | mathematisch argumentieren (K1), mathematische Darstellungen verwenden (K4), kommunizieren (K6)                                                                                                              |
| <b>Inhalt:</b>       | Mittlere und lokale Änderungsrate<br>Herleitung der Ableitung<br>Zusammenhang zwischen Funktions- und Ableitungsgraph<br>Graphisches Differenzieren<br>Berührpunkt- und Tangentenproblem mit Ableitung lösen |

---

## Auf einen Blick

### Überblick und Übung

|               |                                                |
|---------------|------------------------------------------------|
| <b>Thema:</b> | <b>Mittlere und lokale Änderungsrate</b>       |
| <b>M 1</b>    | Differenzenquotient und mittlere Änderungsrate |
| <b>M 2</b>    | Differentialquotient und lokale Änderungsrate  |

|               |                                                            |
|---------------|------------------------------------------------------------|
| <b>Thema:</b> | <b>Bestimmung der Ableitung: Graphisch und rechnerisch</b> |
| <b>M 3</b>    | Ableitung und Ableitungsfunktion: Graphische Bestimmung    |
| <b>M 4</b>    | Zusammenhang zwischen Funktion und Ableitung               |
| <b>M 5</b>    | Aufgaben zu Funktionsgraphen und Ableitungsgraphen         |
| <b>M 6</b>    | Ableitung und Ableitungsfunktion: Rechnerische Bestimmung  |
| <b>M 7</b>    | Ableitung und Ableitungsfunktion: Ableitungsregeln         |

|               |                                             |
|---------------|---------------------------------------------|
| <b>Thema:</b> | <b>Geometrische Anwendung der Ableitung</b> |
| <b>M 8</b>    | I: Das Berührpunktproblem                   |
| <b>M 9</b>    | II: Das Tangentenproblem                    |

### Lernerfolgskontrolle

|             |                                 |
|-------------|---------------------------------|
| <b>M 10</b> | Schriftliche Leistungskontrolle |
|-------------|---------------------------------|

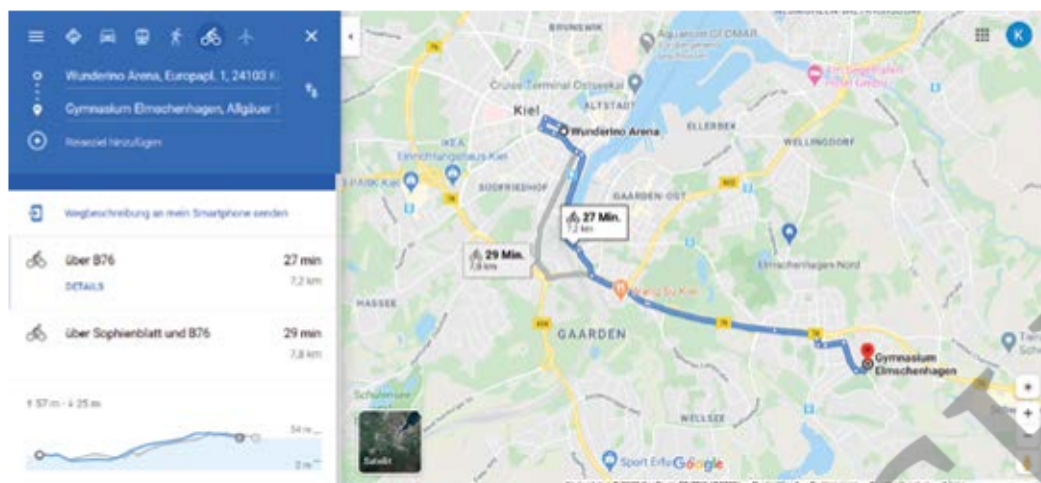
### Minimalplan

Die Zeit ist knapp? Dann konzentrieren Sie sich nicht auf die rechnerischen Herleitungen der Ableitung mit der Näherungstabelle und der Grenzwertberechnung, sondern nutzen die einfachen Ableitungsregeln. Die Übungen zum graphischen Ableiten können Sie als Hausaufgabe geben und gegebenenfalls sogar die Musterlösungen mit austeilen. Anwendungen der Ableitung können ebenfalls gekürzt werden, indem Sie Prioritäten setzen. Beispielsweise können Sie sich auf das Tangentenproblem konzentrieren, da dieses eine höhere Abiturelevanz hat als beispielsweise die Winkelprobleme oder Abstandsberechnungen.

## Differenzenquotient und mittlere Änderungsrate

M 1

Lässt man sich über Google Maps eine Route für das Fahrrad berechnen, bekommt man verschiedene Zusatzinformationen zur Route.



© 2020 GeoBasis-DE/BKG (©2009)

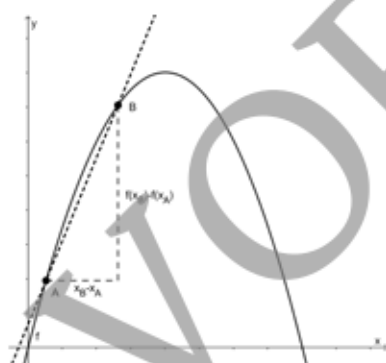
### Aufgabe 1

Lassen Sie sich über Google Maps (oder einen anderen Kartendienst) eine Strecke für das Verkehrsmittel Fahrrad berechnen, die Sie regelmäßig fahren.

### Aufgabe 2

Diskutieren Sie, welche der angebotenen Alternativstrecken Sie wählen würden.

### Mittlere Änderungsrate



Die mittlere (oder auch durchschnittliche) Steigung  $m$  zwischen zwei Punkten  $A$  und  $B$  lässt sich mit dem Differenzenquotient berechnen:

$$m = \frac{f(x_B) - f(x_A)}{x_B - x_A}$$

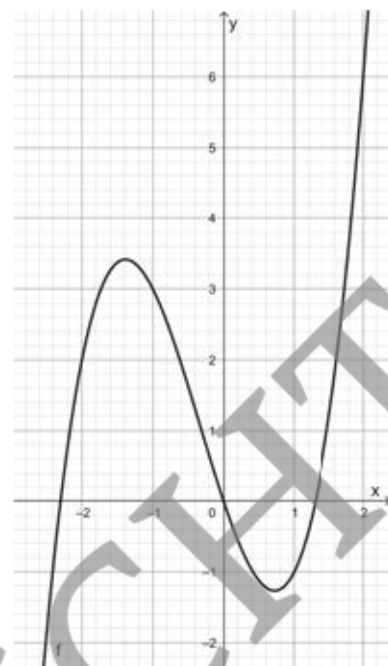
Es handelt sich um die Steigung der Sekante durch  $A$  und  $B$ .

Die mittlere Steigung wird allgemein auch mittlere Änderungsrate genannt, weil in manchen Anwendungszusammenhängen nicht von Steigung gesprochen wird.

**Aufgabe 3**

Gegeben ist die Funktion  $f(x) = x^3 + x^2 - 3x$ .

- Bestimmen Sie zeichnerisch die mittlere Änderungsrate in den Intervallen  $[-2;0]$ ,  $[-1;1]$  und  $[0;2]$ .
- Berechnen Sie die mittlere Änderungsrate in den Intervallen  $[-2;0]$ ,  $[-1;1]$  und  $[0;2]$ .
- Ermitteln Sie zeichnerisch ein Intervall, in dem die mittlere Änderungsrate  $-1$  beträgt.
- Berechnen Sie  $b$  so, dass die mittlere Änderungsrate im Intervall  $[0;b]$  3 beträgt.
- Berechnen Sie  $a$  so, dass die mittlere Änderungsrate im Intervall  $[a;0]$   $-3$  beträgt.

**Aufgabe 4**

Der Wasserstand  $h$  in einer Küstenstadt wird täglich gemessen.

| Tag      | 0    | 1    | 2    | 3    | 4    | 5    | 6    | 7    |
|----------|------|------|------|------|------|------|------|------|
| $h$ in m | 0,59 | 0,76 | 0,89 | 0,78 | 0,69 | 0,94 | 1,13 | 1,08 |

- Berechnen Sie jeweils die durchschnittliche Änderung des Wasserstands von einem Tag auf den nächsten.
- Berechnen Sie die durchschnittliche tägliche Änderung des Wasserstands innerhalb der dokumentierten Woche.

**Aufgabe 5**

Der Gewinn einer kleinen Firma ist im Verlauf der Jahre dargestellt.

| Jahr        | 2000   | 2001   | 2002  | 2003   | 2004   |
|-------------|--------|--------|-------|--------|--------|
| Gewinn in € | 15 350 | 23 670 | 6 480 | 13 560 | -2 350 |

- Berechnen Sie die durchschnittliche jährliche Gewinnänderung in €.
- Berechnen Sie die durchschnittliche jährliche Gewinnänderung in Prozent.

## M 5

## Aufgaben zu Funktionsgraphen und Ableitungsgraphen

## Aufgabe 1

Ordnen Sie den Funktionsgraphen 1 bis 6 deren Ableitungsgraphen aus der Auswahl A bis I zu.

|              |              |              |
|--------------|--------------|--------------|
| <b>1</b><br> | <b>2</b><br> | <b>3</b><br> |
| <b>4</b><br> | <b>5</b><br> | <b>6</b><br> |
| <b>A</b><br> | <b>B</b><br> | <b>C</b><br> |
| <b>D</b><br> | <b>E</b><br> | <b>F</b><br> |
| <b>G</b><br> | <b>H</b><br> | <b>I</b><br> |

## Ableitung und Ableitungsfunktion: Ableitungsregeln

M 7

Damit man die Ableitungsfunktion nicht immer mühsam herleiten muss, gibt es einige Regeln, die das Aufstellen der Ableitung massiv vereinfachen.

### Potenzregel

$$f(x) = x^n \rightarrow f'(x) = n \cdot x^{n-1}$$

$$\text{Beispiele: } f(x) = x^3 \rightarrow f'(x) = 3x^2$$

$$g(x) = x^5 \rightarrow g'(x) = 5x^4$$

„Die Ableitung von Konstanten ist immer Null.“

$$\text{Beispiel: } f(x) = 3 \rightarrow f'(x) = 0$$

### Summenregel

„Summen werden summandenweise abgeleitet.“

$$f(x) = g(x) + h(x) \rightarrow f'(x) = g'(x) + h'(x)$$

$$\text{Beispiel: } f(x) = x^3 + x^2 \rightarrow f'(x) = 3x^2 + 2x$$

### Faktorregel

„Konstante Faktoren bleiben beim Ableiten erhalten.“

$$f(x) = c \cdot g(x) \rightarrow f'(x) = c \cdot g'(x)$$

$$\text{Beispiel: } f(x) = 4x^3 \rightarrow f'(x) = 4 \cdot 3x^2 = 12x^2$$

Später werden Sie weitere Ableitungsregeln für komplexere Funktionen kennenlernen.

### Aufgabe 1

Wenden Sie die Potenzregel zur Bestimmung der Ableitung an.

a)  $f(x) = x^4$

c)  $h(t) = t^4$

e)  $t(y) = y^{3x}$

b)  $g(t) = t^{27}$

d)  $k(x) = x^{m+2}$

### Aufgabe 2

Wenden Sie die Summenregel zur Bestimmung der Ableitung an.

a)  $f(x) = x^2 + x$

b)  $h(x) = x^n + x^{n+1}$

c)  $p(x) = x^4 + t^2$

d)  $q(t) = x^n + t^n$

### Aufgabe 3

Wenden Sie die Faktorregel zur Bestimmung der Ableitung an.

a)  $f(x) = 3x^4$

c)  $n(x) = kx^m$

e)  $s(t) = a^x t^x$

b)  $m(t) = 2t^3$

d)  $t(x) = abx^y$

### Aufgabe 4

Bestimmen Sie die Ableitung der gegebenen Funktionen.

a)  $f(x) = 5x^4 - 8x^2 + 3$

b)  $h(x) = (2x - 5)(5 + 2x)$

c)  $k(x) = 3x \cdot (x^2 - 5x + 3)$

## M 8

## Geometrische Anwendung der Ableitung I: Das Berührpunktproblem



Das Berührpunktproblem ist ein Spezialfall des Schnittpunktproblems.

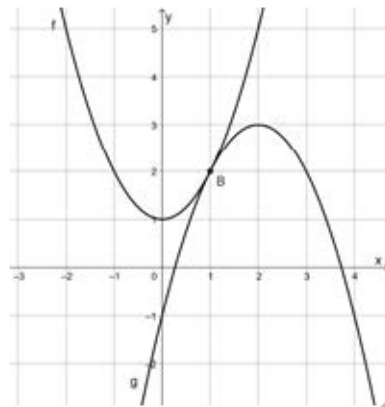
**Merke:**

Für den Berührpunkt  $B(x | y)$  der Funktionsgraphen von  $f$  und  $g$  gilt:

$$f(x) = g(x) \text{ und } f'(x) = g'(x)$$

*Beispiel:*

Berechnen Sie den Berührpunkt  $B$  der Graphen von  $f(x) = x^2 + 1$  und  $g(x) = -x^2 + 4x - 1$ .



Berechnen Sie zuerst alle möglichen Schnittstellen von  $f$  und  $g$ :

$$f(x) = g(x)$$

$$\rightarrow x^2 + 1 = -x^2 + 4x - 1 \Leftrightarrow 2x^2 - 4x + 2 = 0$$

$$\rightarrow x^2 - 2x + 1 = 0 \Leftrightarrow (x - 1)^2 = 0$$

$$\rightarrow x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = 1$$

Überprüfen Sie nun, ob  $f'(1) = g'(1)$ :

$$f'(x) = 2x \rightarrow f'(1) = 2$$

$$g'(x) = -2x + 4 \rightarrow g'(1) = -2 + 4 = 2$$

Berechnung der  $y$ -Koordinate von  $B$ :

$$f(1) = 1^2 + 1 = 2$$

$$g(1) = -1^2 + 4 \cdot 1 - 1 = 2$$

Der Berührpunkt ist  $B(1 | 2)$ .

**Aufgabe 1**

Überprüfen Sie, ob  $P(2 | 1)$  und  $Q(-4 | 7)$  Berührpunkte von  $f(x) = 0,5x^2 - 1$  und  $g(x) = -x^2 + 6x - 7$  sind. Fertigen Sie zunächst eine Skizze an.

**Aufgabe 2**

Zeichnen Sie die Graphen von  $f(x) = 0,5x^2 - x + 3,5$  und  $g(x) = -x^2 + 8x - 10$  und berechnen Sie deren Berührpunkt.