

IV.A.85

Einzelstunden

Hilfsmittelfreie Aufgaben im schriftlichen Mathematik-Abitur – Wissen prüfen

Günther Weber



© Merrill Images/Corbis Documentary

In dieser Einheit finden Sie Aufgaben für den Grund- bzw. Leistungskurs zur Bearbeitung ohne Hilfsmittel aus den Bereichen Analysis, Vektorielle Geometrie und Stochastik. Die Bearbeitung der Aufgaben dient der Vorbereitung auf das schriftliche Abitur. Eine Bepunktung der einzelnen Aufgaben sorgt dabei für realistische Bedingungen.

KOMPETENZPROFIL

Klassenstufe: 12/13

Dauer: Für die einzelnen Aufgaben ca. 15 Minuten

Kompetenzen: Probleme mathematisch lösen (K2), mathematische Darstellungen verwenden (K4), mit symbolischen, formalen und technischen Elementen der Mathematik umgehen (K5)

Inhalt: Analysis u. a. Exponentialfunktion, Sinusfunktion, Wurfelfunktion, Funktionenschar, Tangente, Normale, Nullstelle, Extrempunkte, Grenzwertverhalten, Integral, Extremwertproblem.

Analytische Geometrie u. a. Punkte, Geraden, Ebenen(schar), Winkel zwischen Vektoren, Skalarprodukt.

Stochastik u. a. Binomialverteilung, Normalverteilung, Kenngrößen von Wahrscheinlichkeitsverteilungen, Baumdiagramm, Vierfeldertafel, stochastische Abhängigkeit.

Auf einen Blick

Planung für 90 Minuten für den Grundkurs bzw. 100 Minuten für den Leistungskurs

Aufgaben ohne Hilfsmittel

M 1	Aufgaben Leistungskurs Analysis
M 2	Aufgaben Grundkurs Analysis
M 3	Aufgaben Leistungskurs Vektorielle Geometrie
M 4	Aufgaben Grundkurs Vektorielle Geometrie
M 5	Aufgaben Leistungskurs Stochastik
M 6	Aufgaben Grundkurs Stochastik

Einsatz im Unterricht

Während die Aufgaben des hilfsmittelfreien Teils im Abitur vorgegeben werden, wählt die Lehrkraft aus den Aufgaben für den entsprechenden Kurs die Anzahl von Aufgaben aus, die für das Abitur im Bundesland vorgegeben ist. Die Lernenden bearbeiten diese in der entsprechenden Zeit. Die nicht ausgewählten Aufgaben können dann evtl. zu einem zweiten Aufgabenblock zusammengestellt werden oder die Lernenden bearbeiten diese selbstständig.

Minimalplan

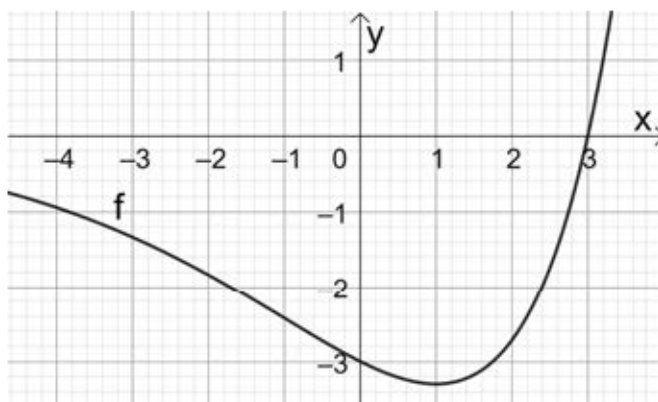
Die Zeit ist knapp? Dann geben Sie den Lernenden die Materialien als selbstständige Vorbereitung auf die Prüfung mit nach Hause.

M 1

Aufgaben Leistungskurs – Analysis

Aufgabe 1

Die Abbildung zeigt den Graphen einer Funktion f .



- Bestimmen Sie zeichnerisch $f'(0)$. (1P)
- Entscheiden Sie begründet, welcher der folgenden Funktionsterme zum Graphen von f gehört.
 $f_1(x) = (x-3) \cdot e^{-\frac{1}{2}x}$; $f_2(x) = (x-3) \cdot e^{\frac{1}{2}x}$; $f_3(x) = x \cdot e^{-\frac{1}{2}x} - 3$ (2P)
- Untersuchen Sie mithilfe des Graphen von f , ob der Graph der Stammfunktion F von f im Bereich der Abbildung Hoch-, Tief- bzw. Wendepunkte hat. (2P)

Aufgabe 2

Gegeben ist die Funktionenschar $f_k(x) = x^2 + kx - k$, $k \neq 0$.

- Zeigen Sie, dass alle Graphen der Schar durch den Punkt $S(1 | 1)$ verlaufen. (1P)
- Bestimmen Sie k so, dass der Graph der Funktion die x -Achse berührt. (2P)
 Die Tiefpunkte der Schar haben die Koordinaten $T_k\left(-\frac{k}{2} \mid -\frac{k^2}{4} - k\right)$.
- Bestimmen Sie die Gleichung der Ortslinie der Tiefpunkte. (2P)

Aufgabe 3

Gegeben ist die Funktion $f(x) = x \cdot \sqrt{6-x}$.

- Bestimmen Sie den Definitionsbereich der Funktion. (1P)
 Es ist $f'(x) = \frac{12-3x}{2 \cdot \sqrt{6-x}}$, $x \in D_f$.
- Zeigen Sie, dass der Punkt $H(4 | f(4))$ der absolute Hochpunkt ist. (3P)
- Geben Sie den Wertebereich der Funktion an. (1P)

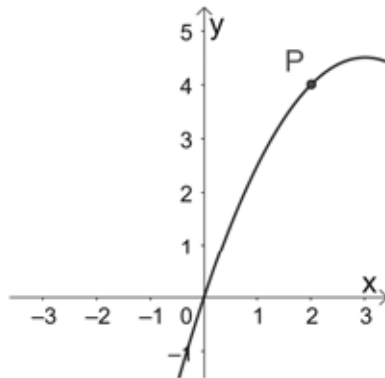
M 2

Aufgaben Grundkurs – Analysis

Aufgabe 1

Gegeben ist die Parabel mit der Gleichung $p(x) = -\frac{1}{2} \cdot (x^2 - 6x)$.

- Zeigen** Sie, dass die Tangente an die Parabel im Punkt $P(2 \mid p(2))$ die Gleichung $t(x) = x + 2$ hat und **zeichnen** Sie die Tangente in die Abbildung. (3P)
- Geben** Sie einen Term **an**, mit dem der Flächeninhalt der Fläche, die zwischen der Tangente, der x-Achse und dem Graph der Funktion p eingeschlossen wird, berechnet werden kann. (2P)



Aufgabe 2

Gegeben ist die Funktion $f(x) = (x^2 - 5x + 5) \cdot e^x$.

- Zeigen** Sie, dass $f'(x) = x \cdot (x - 3) \cdot e^x$ ist. (2P)
- Bestimmen** Sie die Extremstellen der Funktion und **geben** Sie begründet die Art der Extremstellen **an**. (3P)

Aufgabe 3

Gegeben ist die Funktion $f(x) = -\frac{1}{2}x^3 + \frac{3}{2}x + 1$.

- Verschieben** Sie den Graphen der Funktion f in Richtung der y-Achse so, dass der Graph der verschobenen Funktion punktsymmetrisch zum Ursprung ist. (1P)
- Es ist $H(1 \mid 1)$ der Hochpunkt des verschobenen Graphen. **Bestimmen** Sie die Gleichung einer Geraden g durch den Hoch- und Tiefpunkt der verschobenen Funktion. (2P)
- Geben** Sie die Gleichung einer Geraden h durch den Hochpunkt der Funktion f an, die parallel zu g verläuft. (2P)

M 3

Aufgaben Leistungskurs – Vektorielle Geometrie

Aufgabe 1

Gegeben sind die Punkte $A(0 | 0 | 0)$, $B(3 | 0 | 6)$ und $C(1 | 6 | 2)$ sowie die Punkteschar $D_k(5 - 2k | 1 | k)$; $k \in \mathbb{R}$ und die Ebene $E: -2x_1 + x_3 = 0$.

- Bestimmen Sie k so, dass D_k in der Ebene E liegt. (1P)
- Zeigen Sie, dass die Vektoren $\overrightarrow{AB}$ und $\overrightarrow{CD_k}$ für jedes k senkrecht zueinander sind. (2P)
- Der Punkt $L(1 | 1 | 2)$ liegt in der Ebene E . Zeigen Sie, dass L für ein beliebiges k der Lotfußpunkt des Lotes von D_k auf die Ebene E ist. (2P)

Aufgabe 2

Gegeben ist die Ebene $E: x_1 - 2x_2 = 6$ und die Geradenschar

$$g_{a,b}: \vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ -b \\ 1 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ a \\ 1 \end{pmatrix}; a, b \in \mathbb{R}, r \in \mathbb{R}.$$

- Beschreiben Sie die Lage der Ebene E im Koordinatensystem. (1P)
- Bestimmen Sie a und b so, dass die Gerade der Schar in E liegt. (2P)
- Begründen Sie, dass der Winkel beim Eckpunkt A im Dreieck ABC mit $A(2 | -2 | 1)$, $B(2 | -2 | -2)$ und $C(4 | -1 | 3)$ größer als 90° ist. (2P)

Aufgabe 3

Gegeben sind in einem kartesischen Koordinatensystem die Ebene $E: x_1 + 2x_2 - x_3 + 4 = 0$ sowie die Punkte $A(3 | 1 | 3)$ und $B_a(a | a | 2a)$; $a \in \mathbb{R}$.

- Bestimmen Sie die Gleichung der Geraden g_a durch die Punkte A und B_a . (1P)
- Bestimmen Sie den Wert des Parameters a so, dass die zugehörige Gerade g_a parallel zur Ebene E verläuft. (2P)
- Eine Ebene F enthält die Gerade g_2 und verläuft parallel zur x_2 -Achse. Zeigen Sie, dass der Vektor $\vec{n} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ ein Normalenvektor der Ebene F ist. (2P)

Aufgabe 4

Gegeben sind die Geradenschar $g_a: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} a \\ a-3 \\ 1 \end{pmatrix}$; $a \in \mathbb{R}$ und

$$h_b: \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ b+1 \end{pmatrix}; b \in \mathbb{R}.$$

- Bestimmen Sie die Parameter a und b so, dass g_a und h_b parallel verlaufen. (2P)

Gegeben ist zudem die Punkteschar $T_k(1+k | -k | 2+k)$; $k \in \mathbb{R}$.

- Bestimmen Sie die Gleichung einer Geraden l , auf der alle Punkte der Punkteschar liegen. (1P)
- Es ist $A(1 | -3 | 4)$ der Anbindungspunkt der Geradenschar g_a und $B(2 | -1 | 1)$ der Anbindungspunkt der Geradenschar h_b . Bestimmen Sie k so, dass die Vektoren $\overrightarrow{AB}$ und $\overrightarrow{AT_k}$ senkrecht aufeinander stehen. (2P)

M 4

Aufgaben Grundkurs – Vektorielle Geometrie

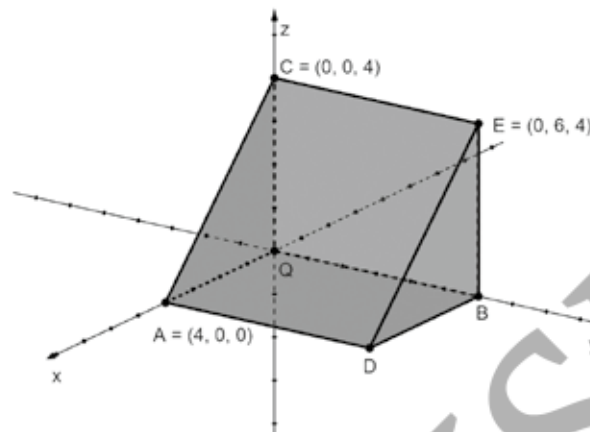
Aufgabe 1

Ein Dreieckprisma liegt so in einem räumlichen Koordinatensystem, dass drei Kanten des Prismas auf den Koordinatenachsen liegen (siehe Abbildung).

- a) **Geben** Sie die Koordinaten des Mittelpunktes M der Kante $\overline{AC}$ des Prismas an. (1P)

Gegeben ist weiterhin der Punkt $S(2 \mid 3 \mid 2)$.

- b) **Begründen** Sie, dass der Punkt S in der durch die Punkte A , C und E aufgespannten Ebene liegt. (2P)
- c) **Überprüfen** Sie, ob das Dreieck ASC rechtwinklig ist. (2P)



Aufgabe 2

Die Punkte $A(4 \mid 0 \mid 4)$, $B(8 \mid 3 \mid 4)$, $C(7 \mid -4 \mid 4)$ und $S(2 \mid 5 \mid 2)$ legen im kartesischen Koordinatensystem eine Pyramide mit dem Grundflächendreieck ABC und der Spitze S fest.

- a) **Zeigen** Sie, dass die Grundfläche ABC ein rechtwinklig-gleichschenkliges Dreieck ist. (2P)
- b) **Geben** Sie die spezielle Lage des Grundflächendreiecks im Koordinatensystem an. (1P)
- c) **Bestimmen** Sie das Volumen der Pyramide. (2P)

Aufgabe 3

Gegeben sind die Punkte $A(1 \mid 0 \mid 0)$, $B(5 \mid 6 \mid 0)$ und $C(0 \mid 6 \mid 0)$.

- a) **Bestimmen** Sie den Mittelpunkt M der Strecke $\overline{AB}$. Zur Kontrolle: $M(3 \mid 3 \mid 0)$. (1P)
- b) **Bestimmen** Sie die Gleichung einer Ebene E in Koordinatenform, die senkrecht zur Geraden g_{AB} durch die Punkte A und B durch den Mittelpunkt M verläuft. (2P)
- c) Es ist $S(3 \mid 3 \mid 6)$. **Zeigen** Sie: Die Strecke $\overline{MS}$ steht senkrecht zur x_1x_2 -Ebene. (2P)

Aufgabe 4

Gegeben sind die Ebenen $E_1: 6x_1 - x_2 - 4x_3 = 12$ und $E_2: -3x_1 + 0,5x_2 + x_3 = -6$.

- a) **Begründen** Sie, dass die Ebenen nicht identisch sind. (1P)
- b) **Ersetzen** Sie in der Koordinatenform von E_2 genau einen Koeffizienten, sodass die beiden Ebenen identisch sind. (2P)
- c) Eine Ebene E_3 hat den Normalenvektor $\vec{n}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$. **Geben** Sie die Lagebeziehung der Ebenen E_1 und E_3 an. (2P)

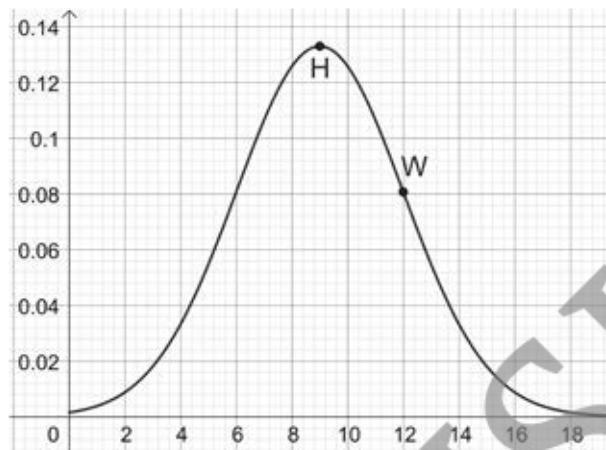
M 5

Aufgaben Leistungskurs – Stochastik

Aufgabe 1

Die Abbildung zeigt den Graphen der Dichtefunktion einer normalverteilten Zufallsgröße X .

- Geben** Sie den Erwartungswert μ von X an. (1P)
- Die Wahrscheinlichkeit, dass X einen Wert aus dem Intervall $[\mu - \sigma; \mu + \sigma]$ annimmt, beträgt ca. 68 %. **Bestimmen** Sie näherungsweise die Wahrscheinlichkeit, dass X einen Wert annimmt, der größer als 12 ist. (2P)
- Die Zufallsgröße Y ist ebenfalls normalverteilt. Der Erwartungswert von Y ist gleich dem Erwartungswert von X und die Standardabweichung von Y ist größer als die Standardabweichung von X . **Skizzieren** Sie in die Abbildung einen möglichen Graphen von Y . (2P)



Aufgabe 2

Drei unterschiedlich große Sektoren eines Glücksrads sind mit „1“, „2“ bzw. „3“ beschriftet und es gilt $P(\text{„3“}) : P(\text{„2“}) : P(\text{„1“}) = 1 : 2 : 3$. Das Glücksrad wird zweimal gedreht.

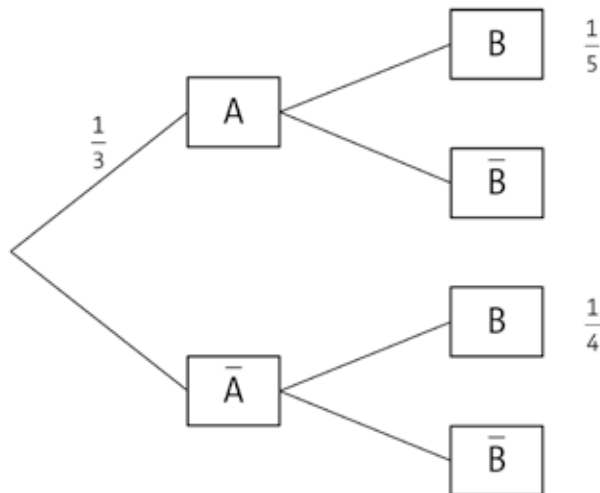
- Bestimmen** Sie die Wahrscheinlichkeit, dass die Summe der „erdrehten“ Zahlen größer als 3 ist. (3P)
- Bestimmen** Sie, ob die Ereignisse A und B stochastisch unabhängig sind. (2P)
 A: Die Summe der „erdrehten“ Zahlen ist 4.
 B: Die erste „erdrehte“ Zahl ist eine Primzahl.

M 6

Aufgaben Grundkurs – Stochastik

Aufgabe 1

- a) Vervollständigen Sie das Baumdiagramm. (4P)
 b) Berechnen Sie $P_g(A)$. (1P)



Aufgabe 2

Bei einer Umfrage werden Frauen (w) und Männer (m) gefragt, ob sie gerne Kaffee trinken (K) oder nicht gerne Kaffee trinken ($\bar{K}$). Aus der Umfragestatistik ergeben sich folgende relative Häufigkeiten:

	m	w	
K			0,7
$\bar{K}$		0,12	
		0,4	

- a) Ergänzen Sie die fehlenden Werte der Vierfeldertafel. (3P)
 b) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit $P_w(K)$ und geben Sie die Bedeutung dieser Wahrscheinlichkeit im Sachzusammenhang an. (2P)