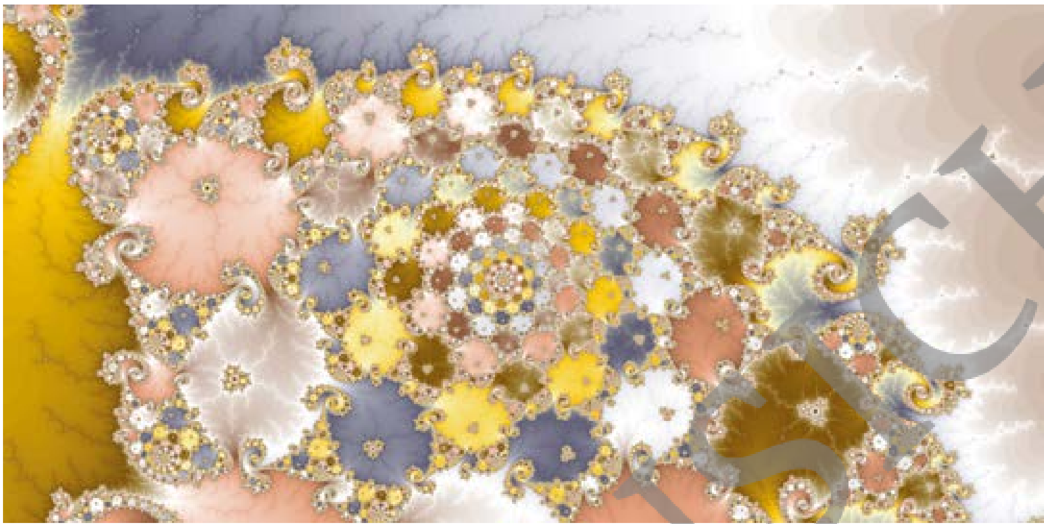
II.D.2

Komplexe Zahlen

Komplexe Zahlen – Von eingebildeten Zahlen bis zur Mandelbrotmenge

Mona Hitzenauer



Wikimedia Commons, gemeinfrei

Über die algebraische Form, Polarform, die Gauß'sche Zahlenebene und Kreisteilungsgleichungen lernen die Jugendlichen die faszinierende Welt der komplexen Zahlen kennen. Sie üben spielerisch den Darstellungswechsel komplexer Zahlen und erarbeiten sich mit der Think-Pair-Share-Methode die Multiplikation und Division. Zum Abschluss entdecken die Lernenden komplexe Folgen und die Mandelbrotmenge.

KOMPETENZPROFIL

LearningApps - interaktive Lernbausteine

Klassenstufe: 12

Dauer: 12–14 Unterrichtsstunden

Kompetenzen: mathematisch argumentieren (K1), mathematische Darstellungen verwenden (K4), mit mathematischen Objekten umgehen (K5), mit Medien mathematisch arbeiten (K7)

Inhalt: Rechenregeln komplexe Zahlen, Gauß'sche Zahlenebene, Polardarstellung, quadratische Gleichungen, Kreisteilungsgleichungen, komplexe Folgen, Mandelbrotmenge

Auf einen Blick

Einstieg

Thema: **Mathematikgeschichte**

M 1 Entwicklung der Zahlenräume

Erarbeitung I

Thema: **Komplexe Zahlen**

M 2 Algebraische Form der komplexen Zahlen
M 3 Rechnen mit komplexen Zahlen
M 4 Gauß'sche Zahlenebene
M 5 Polarform

Benötigt: ☐ Digitale Endgeräte mit Internet (für LearningApp bzw. GeoGebra)

Übung

Thema: **Darstellungswechsel**

M 6 Umklappspiel: Spielanleitung
M 7 Umklappspiel: Spielplan

Benötigt: ☐ Schere, Stifte, Geodreiecke/Lineale

Erarbeitung II

Thema: **Komplexe Zahlen**

M 8 Multiplikation und Division in der Polarform
M 9 Terme und Gleichungen mit komplexen Zahlen
M 10 Kreisteilungsgleichungen
M 11 Komplexe Folgen entdecken
M 12 Mandelbrotmenge

Lernerfolgskontrolle

Thema: **Komplexe Zahlen**

M 13 Lernerfolgskontrolle zu den komplexen Zahlen

Benötigt: ☐ Digitale Endgeräte mit Internet (für LearningApp)

Hilfestellungen

Thema: **Komplexe Zahlen**

M 14 Tippkarten

Minimalplan

Die Zeit ist knapp? Dann planen Sie die Unterrichtseinheit für 5–7 Stunden wie folgt:

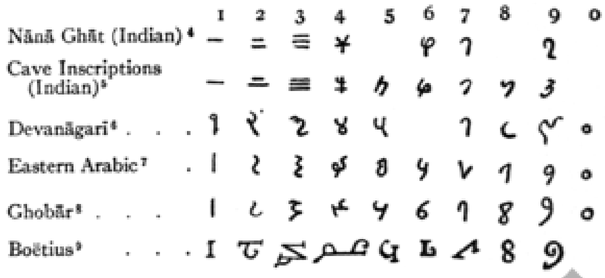
M 2	Algebraische Form der komplexen Zahlen
M 3	Rechnen mit komplexen Zahlen
M 4	Gauß'sche Zahlenebene
M 5	Polarform
M 9	Terme und Gleichungen mit komplexen Zahlen, Aufgaben 2 und 3
M 11	Komplexe Folgen entdecken, Aufgabe 3

Erklärung zu den Symbolen

Dieses Symbol markiert differenziertes Material. Wenn nicht anders ausgewiesen, befinden sich die Materialien auf mittlerem Niveau.

einfaches Niveau mittleres Niveau schwieriges Niveau

M 1 Entwicklung der Zahlenräume



Erste Zahlzeichen verschiedener Kulturen.

Wikimedia Commons, gemeinfrei

Zunächst begannen die Menschen, Dinge zu zählen. Bereits vor 5000 Jahren legten sie für bestimmte Mengen Schriftzeichen fest. Die **natürlichen Zahlen** entstanden langsam aus dem Zählvorgang mit zehn Fingern.

Mit dem Teilen ganzer Zahlen tauchte schnell ein erstes „Problem“ auf. Für die meisten Divisionen gibt es keine ganzzahlige Lösung. So entwickelten sich schon früh die Bruchzahlen, die wir heute mit einem waagerechten Strich zwischen zwei aufeinander stehenden Zahlen oder mit einem Komma schreiben.

Die Kulturen entwickelten sich weiter, statt Warentausch kam nun Geld ins Spiel. Mit der Subtraktion größerer Zahlen von kleineren, etwa beim Schuldenmachen, erfand man vermutlich in China vor ca. 2200 Jahren die negativen Zahlen. Ein kurzer, waagerechter Strich vor der Zahl symbolisiert heute dessen negative Eigenschaft.

Babylonische Steintafel ca. 1800 v. Chr. mit ganzzahligen Lösungen für den Satz von Pythagoras.

Wikimedia Commons, gemeinfrei

Die Null hat eine besonders lange Entstehungsgeschichte hinter sich. Die Babylonier verwendeten zwar schon vor 5000 Jahren eine Art Leerstelle, um etwa die Zahlen 12 und 102 zu unterscheiden. Das „Nichts“ fand aber als eigenständige Zahl erst 700 Jahre nach dem Beginn unserer Zeitrechnung mit dem indischen Gelehrten Brahmagupta Verwendung. Das Zehnersystem, wie wir es heute kennen, stammt daher ursprünglich aus Indien.

Mit der Null waren damit die **ganzen** und zugleich die **rationalen Zahlen** komplett, also alle Zahlen, die man als endlichen Bruch schreiben kann.

Griechische Mathematiker stießen etwa bei ihren Überlegungen zur Diagonale eines Quadrats mit der Seitenlänge eins auf die Gleichun $x^2 = 2$ und wurden in den rationalen Zahlen nicht fündig, Denn heraus kam eine Dezimalzahl mit unendlich vielen Kommastellen, die sich nicht wiederholen. Damit wurden die irrationalen Zahlen – also die nicht rationalen Zahlen geboren. Zusammen mit den rationalen Zahlen bilden sie die **reellen Zahlen**. Die „Lücken“ auf dem Zahlenstrahl waren jetzt endlich alle geschlossen.

Gerolamo Cardano (1501–1576) versuchte im 16. Jh. kubische Gleichungen zu lösen und rechnete vermutlich als Erster mit „eingebildeten“ Zahlen, um Wurzeln von negativen Zahlen zu ziehen. Rafael Bombelli (1526–1572) definierte darauf aufbauend die Rechenregeln der **komplexen Zahlen** und führte eine imaginäre Einheit ein.

Aufgabe

Fassen Sie mithilfe des Texts zusammen, warum die Kulturen bzw. Gesellschaften den Zahlenraum schrittweise erweitern mussten.

Algebraische Form der komplexen Zahlen

M 2

Gleichungen wie $x^2 = -1$ haben in den reellen Zahlen keine Lösung, da kein Quadrat einer reellen Zahl negativ sein kann. Um trotzdem eine Lösung zu erhalten, definierte man eine sogenannte **imaginäre Einheit** *i*, deren Quadrat minus Eins ist:

$$i^2 = -1$$

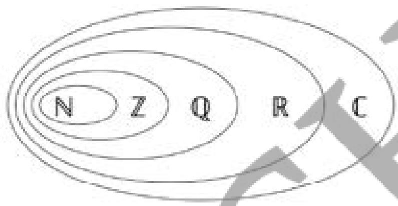
Die imaginäre Einheit *i* ist keine Zahl, keine Variable und auch kein Parameter, sondern stellt ein eigenes Element der Mathematik mit speziellen Eigenschaften dar. Insbesondere hat *i* keine Größe und ist weder positiv noch negativ. Mithilfe von *i* lassen sich komplexe Zahlen *z* definieren, die sich aus folgender Summe der reellen Zahlen *a* und *b* mit *i* ergeben:

$z = a + b \cdot i$

Das ist die **algebraische Form** der komplexen Zahl *z*.

Die reelle Zahl *a* nennt man Realteil (Re) und die reelle Zahl *b* den Imaginärteil (Im) der komplexen Zahl *z*.

Die Gesamtheit aller Zahlen, die sich in dieser Form darstellen lassen, bezeichnet man als die komplexen Zahlen $\mathbb{C}$. Da *i* keine Größe hat, lassen sich die komplexen Zahlen in dieser Form **nicht ordnen**.



Visualisierung der Zahlenmengen
Wikimedia Commons, gemeinfrei

Grundrechenarten mit der algebraischen Form

Beim Rechnen mit komplexen Zahlen verhält sich *i* oft wie eine Variable, aber nicht immer!
In der Regel ersetzt man beim Rechnen stets das Quadrat von *i* mit der Zahl minus Eins.

Addition und Subtraktion

Zwei komplexe Zahlen $z = a + bi$ und $w = c + di$ addiert (subtrahiert) man, indem man ihre Realteile und Imaginärteile getrennt voneinander addiert (subtrahiert) und *i* beibehält:

$z + w = (a + c) + (b + d)i \qquad z - w = (a - c) + (b - d)i$

Multiplikation

Zwei komplexe Zahle $z = a + bi$ und $w = c + di$ multipliziert man, indem man sie in Klammern setzt und ausmultipliziert:

$$z \cdot w = (a + bi) \cdot (c + di) = ac + adi + bci + bdi^2 = ac + (ad + bc)i + bd \cdot (-1)$$
$$= ac - bd + (ad + bc)i$$

Division

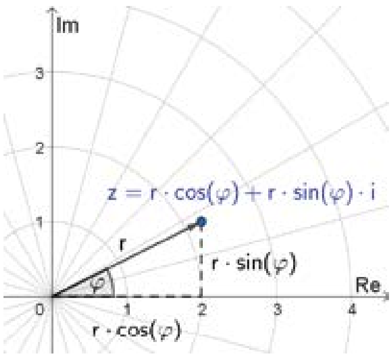
Zwei komplexe Zahlen $z = a + bi$ und $w = c + di \neq 0$ dividiert man, indem man den Nenner mit der **konjugiert komplexen Zahl** $\overline{w} = c - di$ erweitert, um den Nenner reell zu machen:

$$\frac{z}{w} = \frac{a + bi}{c + di} = \frac{(a + bi)(c - di)}{(c + di)(c - di)} = \frac{ac - adi + bci - bd\,i^2}{c^2 - cdi + cdi - d^2 i^2} = \frac{ac + (-ad + bc)i - bd\,i^2}{c^2 - d^2 i^2}$$
$$= \frac{ac + (-ad + bc)i - bd \cdot (-1)}{c^2 - d^2 \cdot (-1)} = \frac{ac + bd + (-ad + bc)i}{c^2 + d^2}$$
$$= \frac{ac + bd}{c^2 + d^2} + \frac{(-ad + bc)}{c^2 + d^2}i$$

> Bei der konjugiert komplexen Zahl ändert sich nur das Vorzeichen des Imaginärteils. Im Nenner ergibt sich damit die dritte binomische Formel.

Polarform

M 5



Die Lage des Punkts auf der Gauß'schen Zahlenebene kann man auch anders beschreiben:

Man misst den Winkel φ (Argument) zwischen Realteilachse und Vektor. Die Länge bzw. den Betrag des Vektors $|\vec{z}\,|$ bezeichnet man mit r. Dadurch ergeben sich für die Kathetenlängen des rechtwinkligen Dreiecks $r \cdot \cos(\varphi)$ und $r \cdot \sin(\varphi)$.

Für z erhält man daher

$z = r \cdot \cos(\varphi) + r \cdot \sin(\varphi) \cdot i = r \cdot (\cos(\varphi) + i \cdot \sin(\varphi))$

Die konjugiert komplexe Zahl $\overline{z}$ ergibt sich durch den Vorzeichenwechsel beim Imaginärteil:

$\overline{z} = r \cdot (\cos(\varphi) - i \cdot \sin(\varphi))$

Aufgrund von $\sin(\varphi) = \sin(\varphi + 2\pi) = \sin(\varphi + 4\pi) = \sin(\varphi + 6\pi) = \ldots$ und analog dazu Kosinus gibt es **unendlich viele** Polarformen einer komplexen Zahl.

Von der algebraischen Form zur Polarform

Die komplexe Zahl $z = a + bi \neq 0$ kann man eindeutig in die Polarform umwandeln, wenn man das Intervall für das Argument φ einschränkt, z. B. $\varphi \in [\,0; 2\pi\,[$.

Den Betrag r bestimmt man über die Länge des Vektors $\vec{z}$:

$r = |\vec{z}| = \sqrt{a^2 + b^2}$

Je nachdem, in welchem Quadranten die komplexe Zahl z liegt, berechnet sich der Winkel bzw. das Argument nach diesen Formeln:

II. Quadrant $\varphi = \cos^{-1}\left(\frac{a}{r}\right)$	I. Quadrant $\varphi = \cos^{-1}\left(\frac{a}{r}\right)$
III. Quadrant $\varphi = 2\pi - \cos^{-1}\left(\frac{a}{r}\right)$	IV. Quadrant $\varphi = 2\pi - \cos^{-1}\left(\frac{a}{r}\right)$

Aufgabe 1

Formulieren Sie entsprechende Bestimmungsmöglichkeiten von $0 \leq \varphi \leq 2\pi$ mit den Beziehungen $\varphi = \tan^{-1}\left(\frac{b}{a}\right)$ bzw. $\varphi = \sin^{-1}\left(\frac{b}{r}\right)$.

Unterscheiden Sie dabei ebenfalls die Quadranten und denken Sie daran, dass der Realteil a auch null werden kann.

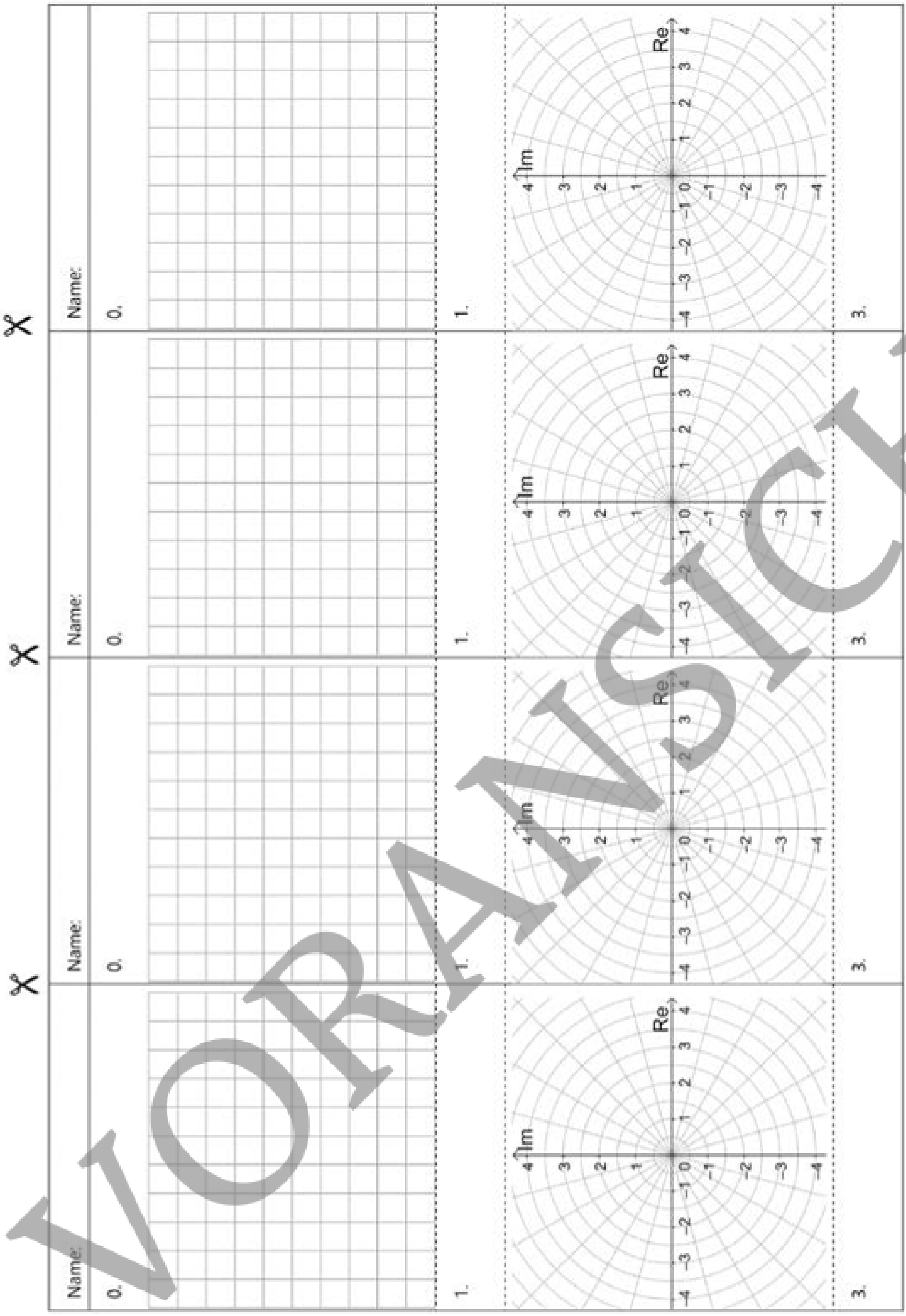
Von der Polarform zur algebraischen Form

Eine komplexe Zahl in Polarform $z = r \cdot (\cos(\varphi) + i \cdot \sin(\varphi))$ kann man eindeutig über folgende Beziehungen in die algebraische Form überführen:

$$a = r \cdot \cos(\varphi)$$
$$b = r \cdot \sin(\varphi)$$

Umklappspiel: Spielplan

M 7



M 8 Multiplikation und Division in der Polarform

Die nachfolgende Methode nennt sich **Think-Pair-Share**, dabei lösen Sie zunächst die Aufgabe in Einzelarbeit (Think-Phase), tauschen dann Ihre Lösung mit einem Partner bzw. mit einer Partnerin aus (Pair-Phase) und diskutieren anschließend die Ergebnisse mit der ganzen Lerngruppe (Share-Phase). Die Aufgaben sind nicht einfach, nutzen Sie daher die Tippkarte.

Multiplikation

Think: Einzelarbeit

Berechnen Sie das Produkt der komplexen Zahlen z und w ausschließlich in Polarform. **Stellen** Sie die Zahlen z und w sowie ihr Produkt als Vektoren in der Gauß'schen Zahlenebene **dar**.

Person 1: $z_1 = 2 \cdot \left(\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) + i \cdot \sin\left(\frac{\pi}{6}\right)\right)$ $w_1 = \frac{1}{2} \cdot \left(\cos\left(\frac{5\pi}{6}\right) + i \cdot \sin\left(\frac{5\pi}{6}\right)\right)$

Person 2: $z_2 = \frac{1}{3} \cdot \left(\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) + i \cdot \sin\left(\frac{2\pi}{3}\right)\right)$ $w_2 = 3 \cdot \left(\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + i \cdot \sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\right)$

Pair: Partnerarbeit

Überprüfen Sie die Lösung Ihres Partners bzw. Ihrer Partnerin. **Diskutieren** Sie Ihre Lösungen der Einzelarbeit: **Finden** Sie Gemeinsamkeiten und Unterschiede. **Verallgemeinern** Sie, wie man zwei komplexe Zahlen in ihrer Polarform algebraisch multiplizieren kann. **Formulieren** Sie, welche geometrische Transformation bei der Multiplikation stattfindet.

Share: Komplette Lerngruppe

Stellen Sie Ihre Ergebnisse aus der Think- und Pair-Phase ihrer Lerngruppe vor und diskutieren Sie sie. **Formulieren** Sie gemeinsam einen Merkspruch, wie man zwei komplexe Zahlen in der Polarform multipliziert.

Division

Wiederholen Sie die Think-Pair-Share-Methode für die Division, teilen Sie also die beiden komplexen Zahlen in ihrer Polarform.

Aufgabe 1

Deuten Sie die Konjugation einer komplexen Zahl geometrisch: **Beschreiben** Sie die geometrische Transformation.

Aufgabe 2

Zeigen Sie, dass $z \cdot \overline{z} = |z|^2$ gilt. Nutzen Sie dazu Ihre Ergebnisse aus dem Think-Pair-Share der Multiplikation.

Aufgabe 3

Zeigen oder **widerlegen** Sie $|z|^2 = |z^2|$.

M 12 Mandelbrotmenge

Eine besondere komplexe Folge ist die Folge
$z_k = z_{k-1}^2 + c$ mit $z_0 = 0$ und $k = 1, 2, 3 \ldots$
wobei c für eine beliebige komplexe Zahl steht.

Aufgabe 1

Berechnen Sie für $c = 1$, $c = i$ und $c = 0{,}2$ arbeitsteilig jeweils die ersten sieben Folgeglieder und evtl. den Betrag der Folgeglieder. **Diskutieren** Sie Ihre Ergebnisse in der Gruppe.

Aufgabe 2

Stellen Sie die ersten zehn Folgeglieder der Folge
$z_k = z_{k-1}^2 + c$ mit $z_0 = 0$ und $k = 1, 2, 3 \ldots$
für beliebige komplexe Zahlen c in GeoGebra **dar**.
Definieren Sie dazu zunächst eine komplexe Zahl c, z. B. mit der Eingabe $c = 1 + i$ und eine komplexe Funktion $f(z) = z^2 + c$ sowie das erste Folgenglied $z_1 = 0^2 + c$. Markieren Sie das erste Folgeglied farbig. Die nächsten neun Folgeglieder können Sie mit $z_2 = f(z_1)$, $z_3 = f(z_2)$ usw. eingeben. Verbinden Sie die Folgeglieder nacheinander mit einer Linie.
Tipp: Das geht mit dem Strecken-Werkzeug recht einfach, wenn Sie z. B. $c = 0{,}28 + 0{,}02i$ wählen.
Verschieben Sie die komplexe Zahl c in der Grafikansicht, um sich verschiedene Folgen anzusehen.
Geben Sie drei komplexe Zahlen an, für die die Beträge aller Folgeglieder unter zwei bleiben.

Mandelbrotmenge

Jede komplexe Zahl c, für die alle Folgeglieder den Betrag zwei nicht überschreiten gehört zur sogenannten Mandelbrotmenge, benannt nach dem französisch-US-amerikanischen Mathematiker Benoît Mandelbrot (1924–2010).

Aufgabe 3

Stellen Sie die Mandelbrotmenge mit einer Software Ihrer Wahl **dar**. Z. B. mit GeoGebra:
Erstellen Sie dazu zunächst eine Schaltfläche. Mit einem Rechtsklick auf die Schaltfläche gelangen Sie zu den Einstellungen der Schaltfläche. Wählen Sie den Reiter „Skripting" und darunter den Reiter „Bei Mausklick". Hier können Sie ein Skript einfügen, das direkt nach einem Linksklick auf die Schaltfläche ausgeführt wird. Achten Sie darauf, unter dem Eingabefenster im Dropdown-Menü den Menüpunkt „JavaScript" auszuwählen.
Erstellen Sie mithilfe eines Chatbots einen JavaScript-Code, der die Mandelbrotmenge mit schwarzen Punkten darstellt. Testen Sie dafür die komplexen Zahlen mit Realteilen zwischen –1,5 und 0,5 und Imaginärteilen zwischen –1 und 1 mit einer Schrittweite von 0,01.
Testen Sie die ersten hundert Folgeglieder.
Tipps:
Achten Sie auf einen möglichst effektiven Code, denn es müssen viele Berechnungen durchgeführt werden. Beginnen Sie erst mit einer kleineren Schrittweite wie 0,1 und weniger Folgegliedern, z. B. zehn, damit Sie den Programmcode besser testen können.