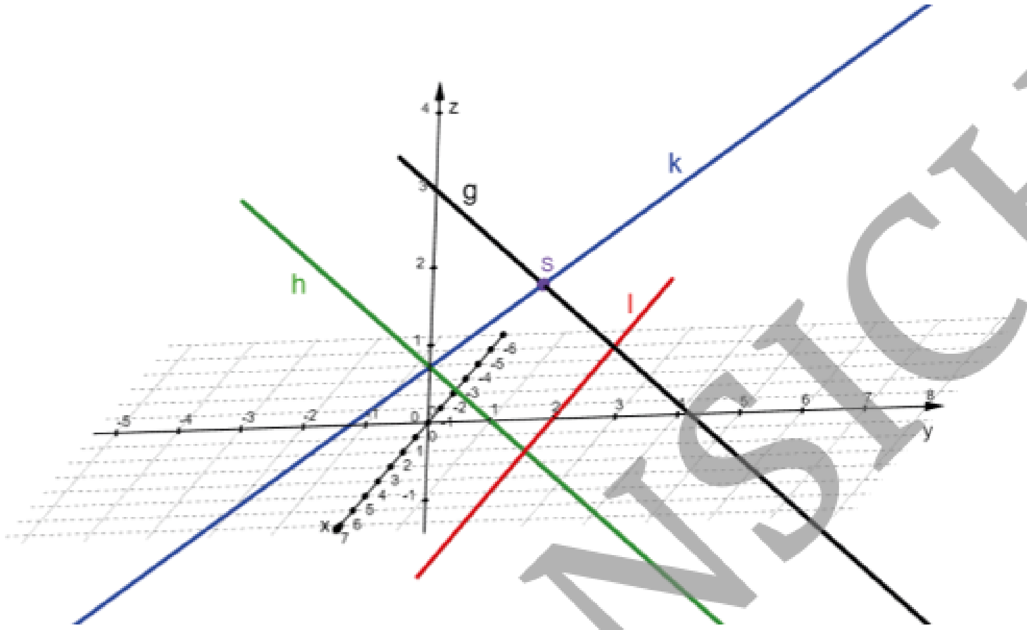
II.B.31

Lineare Algebra und analytische Geometrie

Geraden im Raum – Analytische Geometrie im Anfangsunterricht der Oberstufe

Kerstin Langer



Kerstin Langer © RAABE

Diese Einheit führt Ihre Lernenden wie einen roten Faden durch den Anfangsunterricht der analytischen Geometrie in der Oberstufe. Sie stellen Geradengleichungen in Parameterform auf und untersuchen ihre Lage sowohl im Raum und als auch zueinander. Alle Verfahren sind mit ausführlichen Beispielen beschrieben und bilden ein kompaktes Nachschlagewerk für die kommenden Jahre.

KOMPETENZPROFIL

Klassenstufe:	11
Dauer:	5–8 Unterrichtsstunden
Kompetenzen:	mathematisch argumentieren (K1), mathematische Darstellungen verwenden (K4), mit symbolischen, formalen und technischen Elementen der Mathematik umgehen (K5)
Inhalt:	Geradengleichungen in Parameterform, Punktprobe für Geraden und Strecken, Spurpunkte, Lagebeziehungen von Geraden

Auf einen Blick

Planung für 8 Stunden

Erarbeitung

Thema:	**Geradengleichung in Parameterform**
M 1	Geradengleichung in Parameterform
M 2	Punktprobe für Geraden und Strecken
Thema:	**Lage von Geraden im Raum**
M 3	Lage von Geraden im Raum: Spurpunkte
Thema:	**Lagebeziehungen von Geraden im Raum**
M 4	Lagebeziehungen von Geraden im Raum

Übung

Thema:	**Wissen festigen und vertiefen**
M 5	Aufgaben zum Üben und Vertiefen

Lernerfolgskontrolle

M 6	Aufgaben für eine schriftliche Leistungskontrolle

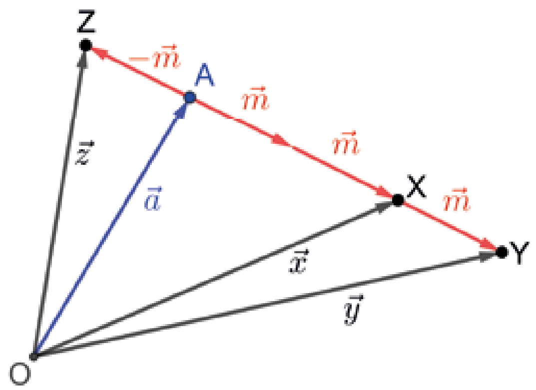
Minimalplan

Die Zeit ist knapp? Dann geben Sie die für Ihre Lerngruppe geeigneten Materialien zum häuslichen Durcharbeiten aus und besprechen im Unterricht die aufgetretenen Fragen. Gegebenenfalls überspringen Sie die Spurpunkte in **M 3** und behandeln diese später bei Schnittpunkten von Geraden mit Ebenen.

Geradengleichung in Parameterform M 1

Punkt-Richtungs-Form einer Geradengleichung

Eine Gerade ist eine Menge von unendlich vielen Punkten. Aus der zweidimensionalen Analysis kennen wir die Darstellung einer Gerade in Form der Geradengleichung $y = mx + b$, wobei m die Steigung und b den y-Achsenabschnitt angibt.
In der analytischen Geometrie werden Geraden mithilfe von Vektoren angegeben.



Jeder Punkt der Geraden lässt sich durch die Linearkombination der Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{m}$ erreichen:

$$\vec{x} = \vec{a} + 2\vec{m} \qquad \vec{y} = \vec{a} + 3\vec{m} \qquad \vec{z} = \vec{a} - \vec{m}$$

$\vec{m}$ wird Richtungsvektor genannt. Durch ihn lassen sich beliebig viele parallele Geraden erzeugen. A ist ein beliebiger Punkt auf der Gerade. $\vec{a}$ wird Stützvektor genannt. Dieser legt fest, um welche der parallelen Geraden es sich handelt. So ist die Gerade eindeutig beschrieben.

> Die Punkt-Richtungs-Form einer Geradengleichung in Parameterform lautet:
> $$\vec{x} = \vec{a} + r\vec{m}, \quad r \in \mathbb{R}$$
> So lässt sich jeder Ortsvektor eines beliebigen Punktes X auf der Geraden als Linearkombination des Stützvektors $\vec{a}$ und des Richtungsvektors $\vec{m}$ darstellen.

Zwei-Punkte-Form einer Geradengleichung

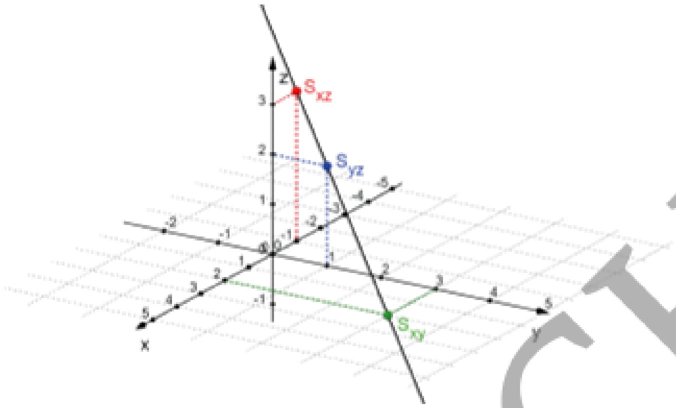
In der Praxis kommt es oft vor, dass eine Gerade durch zwei Punkte gelegt werden soll. In diesem Fall verwendet man den Differenzvektor der beiden Punkte als Richtungsvektor und einen der beiden Ortsvektoren als Stützvektor.

> Die Zwei-Punkte-Form einer Geradengleichung in Parameterform für eine Gerade durch die Punkte A und B lautet:
> $$\vec{x} = \vec{a} + r \cdot \left(\vec{b} - \vec{a}\right), \quad r \in \mathbb{R}$$
> So lässt sich jeder Ortsvektor eines beliebigen Punktes X auf der Geraden als Linearkombination des Stützvektors $\vec{a}$ und des Richtungsvektors $\vec{b} - \vec{a}$ darstellen.

M 3 Lage von Geraden im Raum: Spurpunkte

Um die Lage von Geraden im Raum zu beschreiben, kann man ihre Schnittpunkte mit den drei Koordinatenebenen nutzen. Diese heißen Spurpunkte.

- S_{xy} ist der Schnittpunkt mit der xy-Ebene, d. h., die z-Koordinate ist 0.
- S_{xz} ist der Schnittpunkt mit der xz-Ebene, d. h., die y-Koordinate ist 0.
- S_{yz} ist der Schnittpunkt mit der yz-Ebene, d. h., die x-Koordinate ist 0.



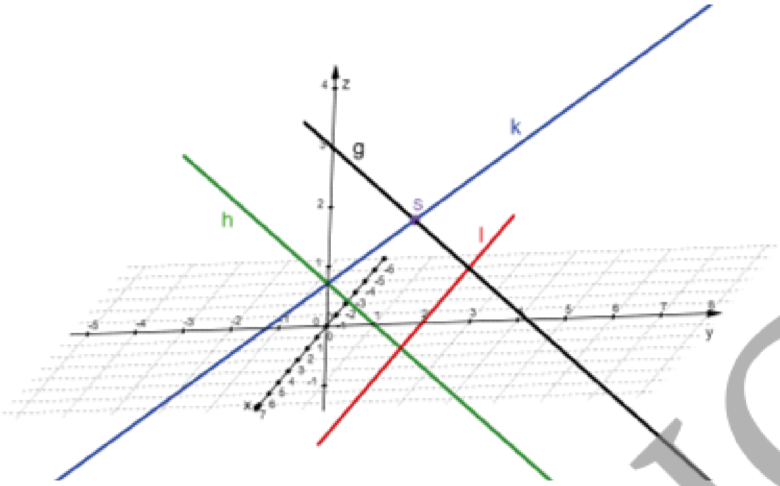
Beispiel: Bestimmen Sie die Spurpunkte der Gerade $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

Die Koordinaten des Spurpunktes werden in die Geradengleichung eingesetzt. Eine Koordinate ist jeweils 0, die anderen sind gesucht.		
$S_{xy}: \begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$	$S_{xz}: \begin{pmatrix} x \\ 0 \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$	$S_{yz}: \begin{pmatrix} 0 \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$
Aufstellen des LGS:		
$\begin{array}{r\|l\|} I & x = -1 + r \\ II & y = 0 + r \\ III & 0 = 3 - r \end{array}$	$\begin{array}{r\|l\|} I & x = -1 + r \\ II & 0 = 0 + r \\ III & z = 3 - r \end{array}$	$\begin{array}{r\|l\|} I & 0 = -1 + r \\ II & y = 0 + r \\ III & z = 3 - r \end{array}$
Aus der Gleichung mit der Koordinate 0 lässt sich r berechnen. Damit können die fehlenden Koordinaten berechnet werden.		
III: $r = 3$ I: $x = 2$ II: $y = 3$	II: $r = 0$ I: $x = -1$ III: $z = 3$	I: $r = 1$ II: $y = 1$ III: $z = 2$
$S_{xy}(2 \mid 3 \mid 0)$	$S_{xz}(-1 \mid 0 \mid 3)$	$S_{yz}(0 \mid 1 \mid 2)$

Lagebeziehungen von Geraden im Raum **M 4**

Für die Lage von Geraden zueinander im Raum gibt es vier Möglichkeiten:

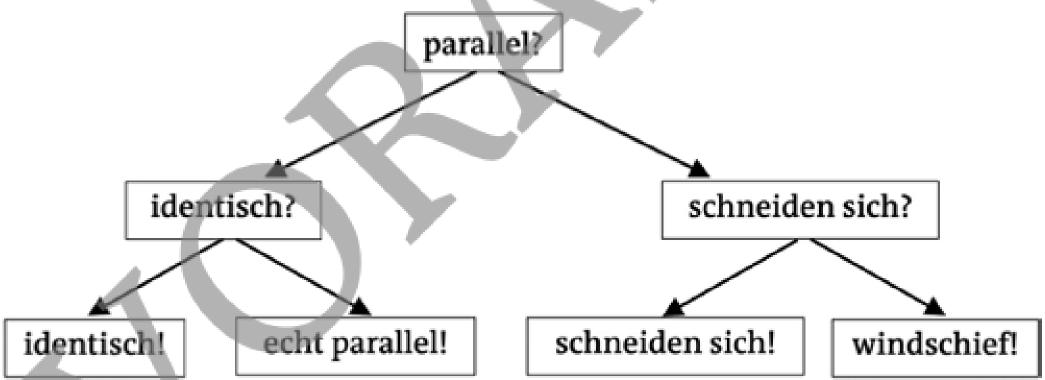
- sie sind parallel (z. B. g und h)
- sie sind identisch
- sie schneiden sich in einem Punkt (z. B. g und k)
- sie sind windschief, d. h., sie sind weder parallel noch schneiden sie sich (z. B. g und l)



$$g: \vec{x} = \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 8 \\ 5 \\ -1 \end{pmatrix} \qquad h: \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -4 \\ -2{,}5 \\ 0{,}5 \end{pmatrix}$$

$$k: \vec{x} = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix} \qquad l: \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + u \cdot \begin{pmatrix} -6 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Die Überprüfung der Lage von Geraden zueinander erfolgt in aller Regel rechnerisch. Wenn Sie die Lage von zwei Geraden überprüfen sollen, können Sie folgendermaßen vorgehen:



M 5 Aufgaben zum Üben und Vertiefen

Aufgabe 1

Gegeben sind die Punkte $A(3\,|-5\,|-2)$, $B(4\,|-1\,|\,2)$ und $C(1\,|-4\,|-5)$.

a) **Stellen** Sie die Gleichung der Geraden g **auf**, die durch A und B verläuft.

b) **Stellen** Sie die Gleichung der Geraden h **auf**, die durch B und C verläuft.

c) **Stellen** Sie die Gleichung der Geraden k **auf**, die parallel zu g und durch C verläuft.

d) **Stellen** Sie die Gleichung der Geraden l **auf**, die parallel zu h und durch A verläuft.

Aufgabe 2

Gegeben sind die Punkte $P(6\,|\,5\,|-2)$ und $Q(1\,|\,3\,|\,4)$ und die Geraden g und h:

$$g: \vec{x} = \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} \qquad h: \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -4 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Überprüfen Sie, ob P und Q auf g bzw. h liegen.

Aufgabe 3

Gegeben sind die Punkte $P(-2\,|\,5\,|-4)$, $Q(0\,|\,11\,|\,4)$, $R(-1\,|\,8\,|\,0)$ und $S(-4\,|-1\,|-12)$.
Überprüfen Sie, ob R und S auf der Strecke $\overline{PQ}$ liegen.

Aufgabe 4

Berechnen Sie die Spurpunkte der Geraden g und h:

$$g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad h: \vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 5

Überprüfen Sie, ob die Punkte $X(0\,|\,3\,|-2)$, $Y(1\,|\,0\,|\,4)$ und $Z(-4\,|-2\,|\,0)$ Spurpunkte einer Geraden sind.

Aufgabe 6

Überprüfen Sie die Geraden g und h sowie g und k auf Parallelität:

$$g: \vec{x} = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 8 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix} \qquad h: \vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 7 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad k: \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 8 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 7

Gegeben sind die Geraden h, k und l. **Berechnen** Sie jeweils deren Schnittpunkte.

$$h: \vec{x} = \begin{pmatrix} -9 \\ 1 \\ 11 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} -4 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix} \qquad k: \vec{x} = \begin{pmatrix} -6 \\ -1 \\ 15 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -8 \end{pmatrix} \qquad l: \vec{x} = \begin{pmatrix} 10 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 7 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 8

Zeigen Sie, dass die Geraden a und b windschief zueinander sind.

$$a: \vec{x} = \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 8 \\ 1 \\ -5 \end{pmatrix} \qquad b: \vec{x} = \begin{pmatrix} 7 \\ 9 \\ 1 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ -2 \\ 6 \end{pmatrix}$$