II.F.8

Verfahren und Denkweisen der Mathematik

Folgen und Reihen in Numerik und Finanzmathematik

Mona Hitzenauer

© primeimages/E+/Getty Images

Computer können nur Plusrechnen? Tatsächlich basieren alle Algorithmen auf Additionen, die im Rechenwerk hintereinander ausgeführt werden. Aber wie kann ein Computer oder Taschenrechner dann mühelos die Funktionswerte etwa der natürlichen Exponentialfunktion berechnen? Über Folgen und Reihen führen die Materialien die jungen Erwachsenen schließlich zur Taylorreihenentwicklung und beantworten dabei diese und viele weitere Fragen.

KOMPETENZPROFIL

Klassenstufe:	12
Dauer:	10–14 Unterrichtsstunden
Kompetenzen:	mathematisch argumentieren (K1), mathematisch modellieren (K3), mathematische Darstellungen verwenden (K4), mit mathematischen Objekten umgehen (K5), mit Medien mathematisch arbeiten (K7)
Inhalt:	vollständige Induktion, arithmetische und geometrische Folge, Monotonie, Beschränktheit und Konvergenz bei Folgen, harmonische und geometrische Reihe, Taylorpolynom, Reihendarstellung der Euler'schen Zahl e

Auf einen Blick

Einstieg

Thema:	**Numerische Mathematik**
M 1	Wie rechnet ein Rechner

Erarbeitung

Thema:	**Mathematische Beweisführung**
M 2	Vollständige Induktion
Thema:	**Folgen und Reihen**
M 3	Folgen
M 4	Eigenschaften von Folgen
M 5	Reihen
M 6	Taylorreihenentwicklung
Benötigt:	☐ Digitale Endgeräte mit Internet

Lernerfolgskontrolle

M 7	Selbsttest

Minimalplan

Die Zeit ist knapp? Dann planen Sie die Unterrichtseinheit für 4–5 Stunden wie folgt:

M 3	Folgen, Aufgabe 5
M 4	Eigenschaften von Folgen, harmonische Folge untersuchen
M 5	Reihen, Aufgaben 3 und 4
M 6	Taylorreihenentwicklung, Aufgabe 1

Erklärung zu den Symbolen

Dieses Symbol markiert differenziertes Material. Wenn nicht anders ausgewiesen, befinden sich die Materialien auf mittlerem Niveau.

einfaches Niveau — mittleres Niveau — schwieriges Niveau

Wie rechnet ein Rechner? M 1

Strom ein und Strom aus. Auf dieser Grundlage basiert unsere moderne Welt – die Welt der Computer und damit auch der künstlichen Intelligenz. Laptop, Smartphone und auch der Taschenrechner sprechen im Binärsystem, das nur aus Nullen und Einsen besteht. Strom ein, Strom aus.

Zählen

Wenn Sie im Binärsystem mit dem Zählen anfangen, stoßen Sie schnell auf eine Grenze: 0, 1, und dann? Wie das uns wohlbekannte Dezimalsystem ist das Binärsystem ebenfalls ein sogenanntes Stellenwertsystem. Denn sonst wäre im Dezimalsystem nach der Neun ja auch Schluss.

Was tun Sie im Dezimalsystem? Genau – Sie fangen in der Einerstelle wieder von vorne (Null) an und führen eine Zehnerstelle mit der Ziffer Eins ein. Danach zählen Sie die Einerstelle bis Neun hoch, bis Sie wieder die Zehnerstelle um eins erhöhen müssen. Falls die Zehner- und Einerstelle nicht mehr reichen, dann kommt die Hunderterstelle usw.

Im Binärsystem läuft es ganz genauso, allerdings mit dem Unterschied, dass Sie statt zehn Ziffern nur zwei Ziffern zur Verfügung haben, entsprechend schnell nehmen die Stellen der Binärzahlen beim Hochzählen zu.

Grundrechenarten

Eine Ziffer – Null oder Eins – wird jeweils in einem Bit gespeichert. Acht Bits ergeben ein Byte und meistens werden für eine Zahl vier oder acht Bytes Speicherplatz reserviert. Mit diesen Bits wird dann gerechnet, besonders effizient und einfach klappt das mit dem Plusrechnen.

Das Minuszeichen gibt's für Rechner nicht. Stattdessen macht man sich zunutze, dass $a - b = a + (-b)$ ist, womit wieder eine Addition durchgeführt wird. Für die Darstellung der negativen Zahl $-b$ wird das erste Bit (von links gesehen) codiert: Null für eine positive Zahl, Eins für eine negative Zahl. Und um aus einer positiven Binärzahl ihre negative Gegenzahl zu gewinnen, wird die Binärzahl invertiert (aus Nullen werden Einsen, aus allen Einsen Nullen) und anschließend eins addiert.

Bei der Multiplikation wird die Zahl – beim einfachsten Verfahren – entsprechend oft zu sich selbst addiert. Schon wieder Plusrechnen. Und – Sie ahnen es bereits – auch die Division läuft über Algorithmen ab, die auf Plusrechnungen basieren.

Ganz schön doof

Um ehrlich zu sein: Ihr Laptop oder Taschenrechner kann nur addieren. Dass das mit den Grundrechenarten funktioniert, sieht man vielleicht noch ein, was ist aber zum Beispiel mit komplexeren Sachen, wie Wurzel ziehen oder Werte der e-Funktion berechnen?

Alles Additionen. Viele. Richtig viele. Wie und was hier etwa für die e-Funktion zusammengerechnet wird, erarbeiten Sie sich mit den nächsten Materialien …

Aufgabe

a) **Stellen** Sie die Dezimalzahlen 1–10 im Binärsystem **dar**.

b) **Geben** Sie die größte ganzzahlige Dezimalzahl **an**, die mit vier bzw. acht Bytes gespeichert werden kann.

M 2 Vollständige Induktion

Theorie und Beispiel

Stellen Sie sich vor, Sie stoßen bei einer Berechnung auf ein Muster, das anscheinend wiederkehrt. Sie entdecken etwa, dass der Term $n^2 + n$ stets durch zwei teilbar ist:

$n = 1$: $1^2 + 1 = 2$

$n = 2$: $2^2 + 2 = 6$

$n = 3$: $3^2 + 3 = 12$

$n = 4$: $4^2 + 4 = 20$

...

Und formulieren daher die mathematische Aussage

$n^2 + n$ ist teilbar durch zwei für $n \in \mathbb{N}$

Doch ist die Aussage wirklich für alle natürlichen Zahlen richtig? Sichergehen können Sie nur mit einem Beweis. Hier können Sie sich eines Beweisprinzips bedienen, das mit dem sogenannten „Dominoeffekt" vergleichbar ist, bei dem ein Dominostein den nächsten bis in die Unendlichkeit umstoßen kann:

Prinzip der vollständigen Induktion
Es liegt eine Aussage über natürliche Zahlen vor. Man zeigt, dass die Aussage für den kleinsten Wert stimmt (meist $n = 1$ oder $n = 0$) (*Induktionsanfang*). Man zeigt mithilfe der Aussage für eine beliebige Zahl n (*Induktionsvoraussetzung*), dass die Aussage für deren Nachfolger $n + 1$ gilt (*Induktionsschritt*). Dann folgt daraus, dass die Aussage für alle natürlichen Zahlen korrekt ist.

Bemerkung: Das Prinzip der vollständigen Induktion ist grundsätzlich für alle Aussagen über Zahlenmengen anwendbar, deren Elemente jeweils einen Nachfolger haben, der eins größer ist.
Ob die Beweismethode zum Ziel führt, ist jedoch so oder so nicht gewiss.

Sie haben bereits gezeigt, dass die Aussage für die Zahl Eins (sogar bis $n = 4$) gilt, der Induktionsanfang ist bereits geschafft. Auch die Aussage selbst haben Sie schon für eine beliebige Zahl n mathematisch eindeutig formuliert. Es fehlt daher nur noch der Induktionsschritt für den Nachfolger $n + 1$:

Sie müssen zeigen, dass

$(n + 1)^2 + n + 1$ durch zwei teilbar ist unter der Voraussetzung, dass $n^2 + n$ durch zwei teilbar ist.

Der „Trick" beim Induktionsschritt ist der, die Induktionsvoraussetzung sichtbar zu machen und anzuwenden. Dazu verhelfen meist geschickte Umformungen:

$$\begin{aligned}(n + 1)^2 + n + 1 &= n^2 + 2n + 1 + n + 1 \\ &= n^2 + n + 2n + 2 \\ &= n^2 + n + 2 \cdot (n + 1)\end{aligned}$$

Die Induktionsvoraussetzung $n^2 + n$ ist durch zwei teilbar und der Term $2 \cdot (n + 1)$ ebenfalls.

Die Summe aus zwei durch zwei teilbare Zahlen (geraden Zahlen) ist wieder eine gerade Zahl. Damit ist die Aussage, dass der Term $n^2 + n$ für alle $n \in \mathbb{N}$ durch zwei teilbar ist, bewiesen.

q. e. d. (quot erat demonstrandum – was zu zeigen war. Wird auch durch ☐ abgekürzt.)

Aufgabe 1

Vervollständigen Sie den Beweis.

Induktionsvoraussetzung:
$5^n + 7$ ist durch vier teilbar für alle $n \in \mathbb{N}_0$
Induktionsanfang:
$n = 0$: $5^0 + 7 = 1 + 7 = 8 = 2 \cdot 4$
Induktionsschritt:
$5^{n+1} + 7 = 5 \cdot 5^n + 7$
$= 4 \cdot 5^n + 1 \cdot 5^n + 7$

Aufgabe 2

Korrigieren Sie den bzw. die Fehler im Beweis.

Induktionsvoraussetzung:
Die schrittweise Summe der ersten n ungeraden, natürlichen Zahlen ist n^2.
$1 + 3 + ... + 2n - 1 = n^2$ für alle $n \in \mathbb{N}$
Induktionsanfang:
$n = 1$: $1 = 1^2$
Induktionsschritt:

Linker Term	Rechter Term
$1 + 3 + ... + 2(n+1) - 1$ $= 1 + 3 + ... + 2n + 2 - 1$ $= 1 + 3 + ... + 2n + 1$ $= \underbrace{1 + 3 + ... + 2n - 1}_{n^2} + 2n + 2n + 1$ $= n^2 + 2n + 2n + 1$ $= n^2 + 4n + 1$	$(n+1)^2$ $= n^2 + 2n + 1$

Folgerung: Die Terme sind nicht gleich, daher ist die Aussage falsch.

Aufgabe 3

Beweisen Sie die Aussage mithilfe der vollständigen Induktion:

Die schrittweise Summe der ersten n natürlichen Zahlen ist $\frac{n^2 + n}{2}$.

Aufgabe 4

Formulieren Sie eine Vermutung (Induktionsvoraussetzung) und **beweisen** Sie sie mit dem Prinzip der vollständigen Induktion:
Betrachten Sie den Term $3^n - 3$ für $n \in \mathbb{N}$

M 3 Folgen

Theorie und Beispiele

Sie kennen bestimmt Aufgaben wie diese aus Intelligenztests:
„Ergänzen Sie folgende Zahlenfolge: 3, 1, 4, 1, 5, ...“
Eine Zahlenfolge ist eine geordnete Auflistung von Zahlen. Die einzelnen Zahlen werden dabei nicht nach ihrer Größe, sondern ihrer Stellung in der Folge geordnet. Außerdem dürfen sich Zahlen auch beliebig oft wiederholen. Wie die Zahlenfolge zustande kommt, beschreibt meist ein Bildungsgesetz (Bildungsvorschrift).

Zahlenfolge
Eine Zahlenfolge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ besteht aus den Folgegliedern a_n mit $n = 1, 2, 3 \ldots$. Jedem Index n wird ein Folgeglied a_n zugeordnet, sodass sich eine Liste aus Zahlen a_1, a_2, a_3 ... ergibt.

Beispiel 1: Arithmetische Folge

> Bei einer arithmetischen Zahlenfolge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist die Differenz d zwischen den Folgegliedern stets konstant. Es gilt also für alle n: $a_{n+1} - a_n = d$.

Wenn Sie das erste Folgeglied a_1 und die Differenz d kennen, können Sie also sehr leicht das nächste Folgeglied bestimmen: $a_2 = a_1 + d$, und damit wiederum das nächste Folgeglied $a_3 = a_2 + d$ usw. Allgemein gilt also das Bildungsgesetz $a_{n+1} = a_n + d$.
Diese Art von Bildungsgesetz nennt man **rekursiv**, da Sie stets auf den Vorgänger zurückgreifen, um das nächste Folgeglied zu berechnen.

Beispiel 2: Fibonacci-Folge

Eine sehr bekannte, rekursiv definierte Zahlenfolge ist die Fibonacci-Folge, benannt nach Leonardo Fibonacci (ca. 1170–1240), der sie beim Wachstum einer Kaninchengruppe verwendete.
Ihre ersten Folgeglieder sind mit $a_1 = 1$ und $a_2 = 1$ definiert und die rekursive Bildungsvorschrift für die weiteren Folgeglieder lautet $a_n = a_{n-2} + a_{n-1}$.

Beispiel 3: Geometrische Folge

> Bei einer geometrischen Zahlenfolge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist der Wert des Quotienten aus dem Nachfolger durch den Vorgänger stets konstant. Es gilt also für alle n: $\frac{a_{n+1}}{a_n} = q$

Durch die Umformung $a_{n+1} = q \cdot a_n$ erhalten Sie sofort ein rekursives Bildungsgesetz. Manche rekursiv definierten Folgen können Sie mithilfe einer „Rückführung“ auf das erste Folgeglied auch mit einer **expliziten** Bildungsvorschrift angeben:

$n = 2$: $a_2 = q \cdot a_1$
$n = 3$: $a_3 = q \cdot a_2 = q \cdot q \cdot a_1 = q^2 \cdot a_1$
$n = 4$: $a_4 = q \cdot a_3 = q \cdot q^2 \cdot a_1 = q^3 \cdot a_1$
...

Daraus ergibt sich folgende explizite Bildungsvorschrift:
$a_n = q^{n-1} \cdot a_1$

Aufgabe 1

Ein Unternehmen kauft eine Maschine für 12 000 €, die auf sechs Jahre linear (pro Jahr) abgeschrieben wird. **Stellen** Sie eine rekursiv definierte Folge **auf**, mit der Sie die Buchwerte der Maschine in den sechs Jahren der Abschreibung berechnen können.

Aufgabe 2

Geben Sie die ersten sieben Folgeglieder der Fibonacci-Folge **an**. **Recherchieren** Sie, ob es eine explizite Bildungsvorschrift für die Fibonacci-Folge gibt. Falls ja – **geben** Sie sie **an**.

Aufgabe 3

Begründen Sie, ob die Auflistung 1, 8, 34, 512 der Anfang einer geometrischen Folge sein könnte. Falls ja: **Geben** Sie die rekursive und explizite Bildungsvorschrift **an**. Falls nein: **Passen** Sie eine Zahl **an** und geben Sie dann die explizite und rekursive Bildungsvorschrift an.

Aufgabe 4

Geben Sie eine explizite Bildungsvorschrift für die Folgeglieder einer arithmetischen Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit der Differenz d in Abhängigkeit von a_1 (dem ersten Folgeglied) und d **an**.

Aufgabe 5

Der Kaufpreis von Schreibtischen wurde versehentlich aus der Datenbank einer Firma gelöscht. Die Tische wurden 2010 gekauft und linear jährlich abgeschrieben. Es finden sich zu den Schreibtischen noch folgende Datensätze: 2014: 17 000 € und 2018: 5000 €.

Geben Sie eine Folge **an**, mit der Sie die fehlenden Buchwerte der Tische berechnen können.

Aufgabe 6

Auf einem Konto wird ein Kapital K_0 jährlich mit einem gleichbleibenden Prozentsatz p verzinst. Die Zinsen werden auf das Konto eingezahlt und erhöhen das zu verzinsende Kapital.

Für das Kapital K_1 nach einem Jahr gilt daher

$K_1 = K_0 + K_0 \cdot p = K_0 \cdot (1 + p)$

Bestimmen Sie das Kapital K_n nach n Jahren in Abhängigkeit des Anfangskapitals K_0.

Aufgabe 7

Bestimmen Sie die ersten zehn Folgeglieder von $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit der rekursiven Bildungsvorschrift $a_n = \frac{a_{n-1}}{a_{n-2}} \neq 0$ jeweils in Abhängigkeit der Anfangswerte a_1 und a_2. **Beschreiben** Sie die besondere Eigenschaft der Folge.

Aufgabe 8

Geben Sie (mithilfe eines Chatbots) mindestens zwei mögliche explizite Bildungsvorschriften für die Folgen **an**, deren erste vier Glieder gegeben sind mit 1, 2, 2, 1.

Begründen Sie damit, dass das Aufzählen der ersten Folgeglieder einer Zahlenfolge wie bei Intelligenztests kein eindeutiges Bildungsgesetz darstellt.

Hinweis: Mit Zuhilfenahme eines Chatbots besitzt die Aufgabe mittleres Niveau, ohne Zuhilfenahme sehr schweres.

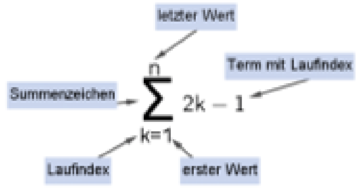
Reihen

M 5

Die Summenschreibweise

Endliche und unendliche Summen kennen Sie bereits in der aufzählenden Schreibweise („Pünktchenschreibweise" wegen der Auslassungspunkte „..."), etwa die endliche Summe der natürlichen Zahlen bis zu einer bestimmten Zahl n: $1 + 2 + 3 + ... + n$

Die Summe können Sie aber auch eleganter notieren mithilfe des Summenzeichens, des großen Sigmas Σ aus dem griechischen Alphabet.



Mona Hitzenauer © RAABE

Unterhalb des Summenzeichens steht stets der Laufindex mit seinem ersten Wert und oberhalb des Summenzeichens der letzte Wert des Laufindex, der endlich oder auch unendlich sein kann. Der Laufindex nimmt zwischen diesen Werten nur ganzzahlige Werte an. Rechts neben dem Summenzeichen steht schließlich ein Term, aus dem Sie die Summanden mithilfe des Laufindex berechnen können.

Beispiel: Als Laufindex wählen Sie z. B. den Buchstaben k (üblich sind i, j und k). Als ersten Wert des Laufindex k setzen Sie 1 fest, also steht unterhalb des Summenzeichens $k = 1$ (je nach Aufgabenstellung können dafür aber auch andere Werte genutzt werden, z. B. $k = 0$). Für den letzten Wert für k definieren Sie n. Mit dieser unteren und oberen Grenze für k wird der Term, aus dem sich die Summanden berechnen, besonders einfach, er lautet einfach k. Sie erhalten also damit:

$$1 + 2 + 3 + ... + n = \sum_{k=1}^{n} k$$

Aus Folgen werden Reihen

Betrachten Sie nochmals die **harmonische Folge** $a_n = \frac{1}{n}$ für $n \in \mathbb{N}$, doch diesmal addieren Sie schrittweise die Folgeglieder. Diese schrittweisen Summen nennt man Partialsummen.

Hier als Beispiel die ersten drei Partialsummen:

$$\frac{1}{1} = \sum_{k=1}^{1} \frac{1}{k} \qquad \frac{1}{1} + \frac{1}{2} = \sum_{k=1}^{2} \frac{1}{k} \qquad \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \sum_{k=1}^{3} \frac{1}{k}$$

Wenn Sie nun den letzten Wert der Summe (oberhalb des Summenzeichens) gegen unendlich laufen lassen erhalten Sie die sog. **harmonische Reihe:**

$$\lim_{n \to \infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} =: \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + ...$$

Existiert der Grenzwert, so konvergiert die Reihe, andernfalls divergiert die Reihe.

Konvergenzkriterien für Reihen

Betrachten Sie zwei Reihen A und B mit $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ bzw. $\sum_{k=0}^{\infty} b_k$ und den Reihengliedern a_k und b_k.

Majoranten- und Minorantenkriterium

A ist absolut **konvergent**, wenn B konvergent ist und $b_k \geq |a_k|$ ab einem bestimmten k gilt.

A ist **divergent**, wenn B divergent ist und $0 \leq b_k \leq a_k$ ab einem bestimmten k gilt.

Quotientenkriterium

A ist absolut **konvergent**, falls $\lim_{k \to \infty} \left| \frac{a_{k+1}}{a_k} \right| := q$ existiert und $q < 1$ ist. Für $q > 1$ ist A **divergent**.

M 6 Taylorreihenentwicklung

Ihr Taschenrechner, Smartphone oder auch Ihr Laptop kann in kürzester Zeit Funktionswerte berechnen. Das nutzen Sie wahrscheinlich täglich, ohne groß darüber nachzudenken, wie das Ganze eigentlich funktioniert. Habe ich Sie ertappt?

Wie Sie sich wahrscheinlich schon gedacht haben, sind die Funktionswerte nicht einfach in einer Tabelle gespeichert. Denn erstens: das wären unfassbar viele und zweitens: es geht auch weit eleganter.

Um ehrlich zu sein, Computer können nur Plusrechnen. Es musste also ein Weg gefunden werden, wie man Funktionswerte durch Aufsummieren bestimmen kann. Spoiler (?): Es hat geklappt, aber mit kleinen Ungenauigkeiten.

Von der Funktion zur Reihe

Die Werte einer Funktion $f(x)$ können Sie rund um einen Punkt x_0 durch ein sogenanntes **Taylorpolynom** n-ten Grades annähern:

$$f(x) \approx T_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} \cdot (x - x_0)^k$$

$$= \frac{f(x_0)}{0!} \cdot (x - x_0)^0 + \frac{f'(x_0)}{1!} \cdot (x - x_0)^1 + \frac{f''(x_0)}{2!} \cdot (x - x_0)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} \cdot (x - x_0)^n$$

Beispiel: Taylorpolynom 3. Grades für $f(x) = \sin(x)$ um den Entwicklungspunkt 0:

$$\sin(x) \approx \frac{\sin(0)}{0!} \cdot x^0 + \frac{\cos(0)}{1!} \cdot x^1 - \frac{\sin(0)}{2!} \cdot x^2 - \frac{\cos(0)}{3!} \cdot x^3 = x - \frac{1}{6}x^3$$

Diese Näherungsformel können Sie offensichtlich nur dann anwenden, wenn die Funktion auch n-mal an der Stelle x_0 differenziert werden kann.

Für n gegen unendlich erhalten Sie die **Taylorreihe** von f um den Entwicklungspunkt x_0, die exakt mit den Funktionswerten in einer Umgebung rund um x_0 übereinstimmt:

$$f(x) = T(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} \cdot (x - x_0)^k \text{ in einem Intervall um } x_0$$

Aufgabe 1

Bestimmen Sie das Taylorpolynom 5. Grades $T_5(x)$ der Funktion $f(x) = e^x$ um den Entwicklungspunkt $x_0 = 0$.

Stellen Sie die Taylorpolynome 2. bis 5. Grades mit f in einem Koordinatensystem **dar**.

Extra: **Bestimmen** Sie die Abweichung (das sogenannte Restglied) $R_5(x) = f(x) - T_5(x)$ für $x = -0{,}1$.

Aufgabe 2

Stellen Sie das Taylorpolynom n-ten Grades für $1 \le n \le 100$ der Funktion $f(x) = e^x$ um den Entwicklungspunkt $x_0 = 0$ zusammen mit der Funktion in GeoGebra **dar**. Nutzen Sie dafür einen Schieberegler n.

Beschreiben Sie die Graphen mit steigendem n und **formulieren** Sie eine Aussage bezüglich der Konvergenz der zugehörigen Taylorreihe.

Geben Sie anschließend die Reihendarstellung der Euler'schen Zahl e **an**.