

II.A.53 Analysis

Beschleunigung und Geschwindigkeit beim Sprint mit der Exponentialfunktion modellieren

Matthias Borchardt



© Photobob/ Wikimedia Commons, CC BY-2.0,
https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Usain_Bolt_winning.jpg

Diese Unterrichtseinheit verbindet Exponentialfunktionen mit einem realitätsnahen Kontext aus dem Leistungssport. Die Lernenden analysieren Geschwindigkeit, Beschleunigung, Weg und Leistung anhand eines mathematischen Modells und interpretieren die Ergebnisse sachgerecht. Dabei vertiefen sie zentrale Inhalte des Lehrplans wie Ableitung, Integration, Extremwertprobleme und mathematisches Modellieren systematisch. Digitale Medien und eine optionale Simulation unterstützen das entdeckende Lernen und fördern die Motivation.

KOMPETENZPROFIL

Klassenstufe:	11–13
Dauer:	4–8 Unterrichtsstunden
Kompetenzen:	Probleme mathematisch lösen (K2), mathematisch modellieren (K3), mathematische Darstellungen verwenden (K4), mit mathematischen Objekten umgehen (K5), mit Medien mathematisch arbeiten (K7)
Inhalt:	Exponentialfunktionen, Ableitung, Integration, Extremwertprobleme, Leistung

Auf einen Blick

Lernstandsdiagnose

M 1 Können Sie das noch? Aufgaben zur e-Funktion

Erarbeitung

M 2 Der Weltrekordlauf von Usain Bolt
M 3 Von der Geschwindigkeit zur Beschleunigung
M 4 Von der Geschwindigkeit zum zurückgelegten Weg
M 5 Die maximale und die durchschnittliche Leistung

Computersimulation

M 6 Dynamische Darstellung der physikalischen Größen

Ergebnissicherung

M 7 Merkzettel: e-Funktion und physikalische Größen

Übung

M 8 Gemischte Übungen zur Exponentialfunktion

Minimalplan

Die Zeit ist knapp? Dann planen Sie die Unterrichtseinheit für 4 Stunden mit den folgenden Materialien:

M 1 Können Sie das noch? Aufgaben zur e-Funktion
M 2 Der Weltrekordlauf von Usain Bolt
M 3 Von der Geschwindigkeit zur Beschleunigung
M 4 Von der Geschwindigkeit zum zurückgelegten Weg

Können Sie das noch? Aufgaben zur e-Funktion

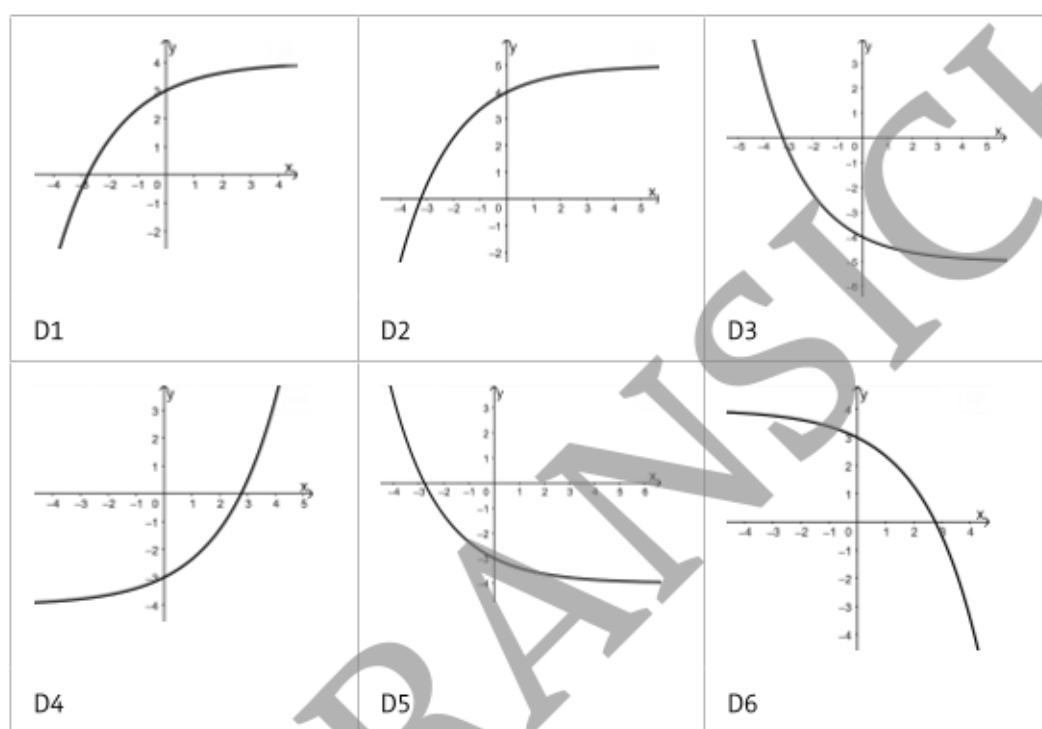
M 1



Aufgabe 1

Sechs der acht Funktionsgleichungen passen zu den sechs Graphen. **Ordnen Sie die Funktionsgleichungen den passenden Graphen zu und begründen Sie kurz Ihre Entscheidungen.**

- A. $f(x) = e^{0,5x} - 4$
- B. $f(x) = 4 - e^{-0,5x}$
- C. $f(x) = e^{-0,5x} - 3$
- D. $f(x) = e^{-0,5x} - 4$
- E. $f(x) = 5 - e^{-0,5x}$
- F. $f(x) = 4 - e^{0,5x}$
- G. $f(x) = e^{-0,5x} - 5$
- H. $f(x) = 3 - e^{0,5x}$



Aufgabe 2

a) Gegeben ist die Funktion $f(x) = 8 \cdot (1 - e^{-0,2 \cdot x})$, $x \in \mathbb{R}$.

1. Eine Sekante schneidet den Funktionsgraphen von f an den Stellen $x = 0$ und $x = 4$. **Berechnen Sie die Steigung dieser Sekante. (Runden Sie auf 2 Nachkommastellen.)**
2. **Berechnen Sie die Steigung der Tangente an der Stelle $x = 4$.**
3. **Berechnen Sie die Stelle, an der der Funktionsgraph die Steigung 1 hat.**

b) Gegeben ist die Funktion $f(x) = 30 \cdot e^{-0,3 \cdot x} \cdot (1 - e^{-0,3 \cdot x})$, $x \in \mathbb{R}$.

1. **Berechnen Sie die Extrempunkte der Funktion.**
2. **Berechnen Sie den Flächeninhalt, welchen die Kurve im Intervall $[0 ; 10]$ mit der x -Achse einschließt.**

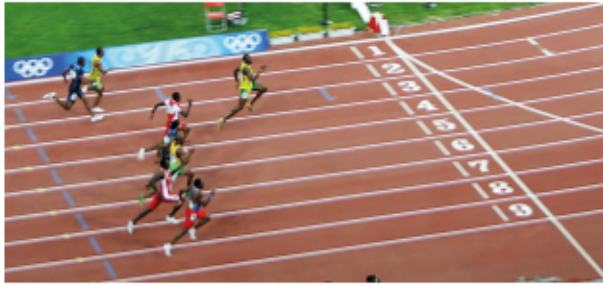
Tipp: Multiplizieren Sie die Klammer aus und integrieren Sie dann.

3. **Berechnen Sie den Flächeninhalt, welchen die Kurve von Null bis ins Unendliche mit der x -Achse einschließt.**



M 2

Der Weltrekordlauf von Usain Bolt



© PhotoBobil/Wikimedia Commons, CC BY-2.0,
https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Usain_Bolt_winning.jpg

Der jamaikanische Sprinter Usain Bolt hält bis dato (2026) den Weltrekord über die 100-m-Strecke mit einer Zeit von 9,58 Sekunden. Das Diagramm (Abb. 1) zeigt, wie sich die Geschwindigkeit des Sprinters während des Weltrekordlaufs entwickelte. Ein solcher Kurvenverlauf ist typisch für Weltklassesprinter und lässt sich mathematisch in guter Näherung durch eine Exponentialfunktion der Form $v(t) = v_{max} \cdot (1 - e^{-k \cdot t})$ beschreiben, wobei v_{max} die maximal erreichbare Geschwindigkeit darstellt und k eine Konstante ist, welche den Kurvenanstieg beeinflusst. Konkret ergibt sich für die Modellkurve die Funktion $v(t) = 12 \cdot (1 - e^{-0,8 \cdot t})$, wobei t in Sekunden und v in m/s gemessen werden.

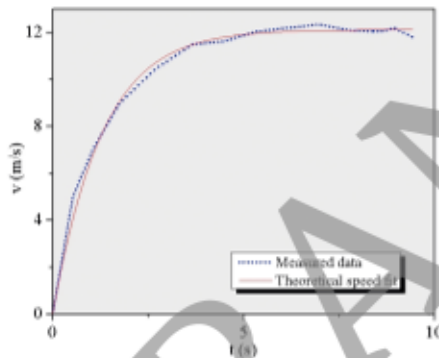


Abb. 1

Aufgaben

- Berechnen** Sie die Geschwindigkeit zum Zeitpunkt $t = 1$ s sowie beim Zieleinlauf, also zum Zeitpunkt $t = 9,58$ s. **Geben** Sie die Ergebnisse auch in der Einheit km/h an.
 Tipp: Sie erhalten die Einheit km/h, indem Sie die Zahl mit der Einheit m/s mit 3,6 multiplizieren.
- Überlegen** Sie: Wären Sie in der Lage, die berechneten Geschwindigkeiten mit Ihrem Fahrrad auf gerader Strecke zu erreichen?

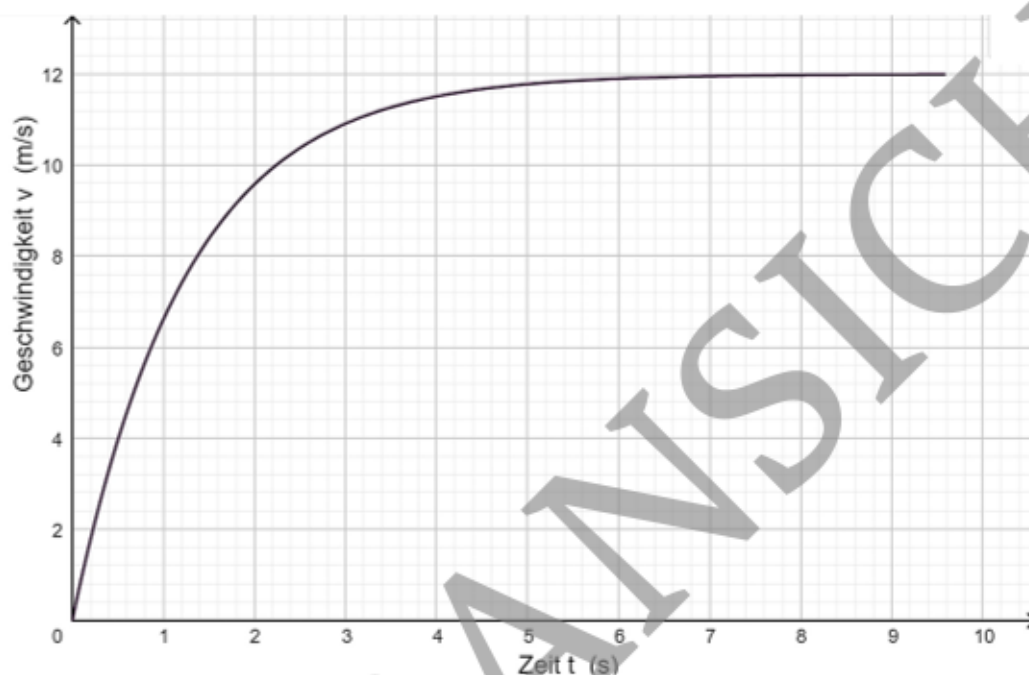
Von der Geschwindigkeit zur Beschleunigung

M 3

Physikalisch ist die Beschleunigung als Geschwindigkeitsänderung pro Zeitintervall definiert. Wenn wir nun das Zeitintervall beliebig klein werden lassen, erhalten wir die Beschleunigung zu einem bestimmten Zeitpunkt. Die Beschleunigungsfunktion gibt daher die momentanen Änderungsraten der Geschwindigkeitsfunktion wieder, oder auf andere Art formuliert: Die Beschleunigungsfunktion $a(t)$ ergibt sich durch Ableiten der Geschwindigkeitsfunktion $v(t)$.
Es gilt also $a(t) = v'(t)$.

Aufgabe

Das Diagramm zeigt die zeitliche Entwicklung der Geschwindigkeit gemäß der Modellfunktion $v(t) = 12 \cdot (1 - e^{-0,8 \cdot t})$.



- Beschreiben** Sie zunächst in Worten und ohne Rechnung, aber unter Berücksichtigung der Geschwindigkeitskurve, wie sich die Beschleunigung des Sprinters Usain Bolt während seines Laufs entwickelte.
- Zeigen** Sie, dass sich für die Beschleunigung die Funktion $a(t) = 9,6 \cdot e^{-0,8 \cdot t}$ ergibt.
- Stellen** Sie die Beschleunigungsfunktion $a(t)$ graphisch dar (z. B. mithilfe von GeoGebra) und **interpretieren** Sie den Kurvenverlauf der Beschleunigung im Sachzusammenhang.
- Berechnen** Sie die Beschleunigung zu den Zeitpunkten 0, 1 und 2 Sekunden und **vergleichen** Sie die Ergebnisse mit dem Wert der Erdbeschleunigung von $9,81 \text{ m/s}^2$, also mit der Beschleunigung beim freien Fall.
Hinweis: Die Beschleunigung a hat die Einheit m/s^2 .



M 4

Von der Geschwindigkeit zum zurückgelegten Weg

In der Physik ist die Geschwindigkeit als Wegänderung pro Zeitintervall definiert. Wenn wir nun die Geschwindigkeit nicht innerhalb eines Zeitintervalls, sondern zu einem bestimmten Zeitpunkt berechnen wollen, müssen wir die momentane Änderungsrate des Weges s bestimmen. Somit erhalten wir die Geschwindigkeitsfunktion $v(t)$, indem wir die Weg-Funktion $s(t)$ ableiten. Es gilt also $v(t) = s'(t)$.

Im konkreten Fall kennen wir die Weg-Funktion nicht, dafür aber die Geschwindigkeitsfunktion. Um die Weg-Funktion zu ermitteln, müssen wir also umgekehrt verfahren und die Weg-Funktion mithilfe der Stammfunktion von $v(t)$ berechnen.

Konkret gilt also: $s(t) = \int_0^t v(x) dx$

Wie zuvor wird die Modellfunktion $v(t) = 12 \cdot (1 - e^{-0,8 \cdot t})$ verwendet.



© Tobi 87/Wikimedia Commons, CC BY-SA 3.0,

https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Leichtathletik_WM_2013_Moskau_100_m_Vorlauf.jpg

Aufgaben

- Die Zeit-Weg-Funktion $s(t)$ erhalten Sie durch Integration der Geschwindigkeitsfunktion. Das bedeutet $s(t) = \int_0^t v(x) dx$. **Führen** Sie die Integration **durch** und **zeigen** Sie, dass sich die Funktion $s(t) = 12 \cdot (1,25 \cdot e^{-0,8 \cdot t} + t - 1,25)$ ergibt.
- Nach 9,58 Sekunden sollte sich eine zurückgelegte Strecke von 100 m ergeben. **Bestätigen** Sie durch eine Rechnung diesen Wert im Rahmen der Modellgenauigkeit.
- Stellen** Sie die Funktion $s(t)$ graphisch **dar** und **beschreiben** Sie den Kurvenverlauf im Sachzusammenhang.

Die maximale und die durchschnittliche Leistung

M 5

Damit der Sprinter auf seine Endgeschwindigkeit kommt, muss er in den ersten Sekunden nach dem Start stark beschleunigen. Innerhalb dieser Phase wird am meisten Leistung (gemessen in Watt) in horizontaler Richtung umgesetzt. Physikalisch ergibt sich die **Leistung pro kg** aus dem Produkt von Geschwindigkeit und Beschleunigung. Es gilt $\frac{P(t)}{m} = v(t) \cdot a(t)$, wobei m die Masse des beschleunigten Körpers ist.

Beachten Sie, dass dies nur zum Teil die Leistung beschreibt, die in den Muskeln des Sprinters umgesetzt wird. Sie erkennen dies allein schon daran, dass die obere Formel eine Leistung von null Watt ergibt, sobald die Geschwindigkeit konstant ist. Denn dann erfährt die Masse m keine Beschleunigung mehr in horizontaler Richtung ($a(t) = 0$) und das Produkt aus Geschwindigkeit und Beschleunigung ist null, obwohl die Muskeln natürlich auch während der konstanten Geschwindigkeit Arbeit verrichten.

Infobox für Physikerinnen und Physiker

Die Arbeit W ist in der Physik definiert als das Produkt aus der Kraft F und dem zurückgelegten Weg s („Kraft mal Weg“). Die Leistung P ist definiert als der Quotient aus verrichteter Arbeit W und verstrichener Zeit t .

Es gilt also: $W = F \cdot s$ und $P = \frac{W}{t}$.

Außerdem ist die Kraft mit der Beschleunigung über verknüpft und für eine Bewegung mit konstanter Geschwindigkeit gilt $v = \frac{s}{t}$.

Daraus erhalten wir: $P = \frac{W}{t} = \frac{F \cdot s}{t} = F \cdot \frac{s}{t} = F \cdot v = m \cdot a \cdot v$. Wenn wir dies durch m dividieren, ergibt sich die Leistung pro Masse: $\frac{P}{m} = a \cdot v$.

Aufgabe 1

- Zeigen** Sie, dass dies im konkreten Fall die Funktion $\frac{P(t)}{m} = 115,2 \cdot e^{-0,8 \cdot t} \cdot (1 - e^{-0,8 \cdot t})$ ergibt.
- Das Diagramm (Abb. 1) zeigt den Kurvenverlauf der Funktion $P(t)/m$. Sie sehen, dass Usain Bolt nach weniger als einer Sekunde bereits die maximale Leistung erreichen konnte. **Berechnen** Sie den genauen Zeitpunkt t_{max} des Maximums und **geben** Sie den maximalen Leistungswert (in Watt pro Kilogramm) **an**.
Tipp: Sie können für die Ableitung der Funktion die Produktregel verwenden. Einfacher ist es allerdings, wenn Sie die Klammer erst ausmultiplizieren und dann ableiten. Die Prüfung einer hinreichenden Bedingung für die Extremstelle ist nicht erforderlich.
- Berechnen** Sie, nach wie vielen Metern das Maximum der Leistung erreicht wurde.
Tipp: Setzen Sie den Zeitpunkt t_{max} in die Funktion $s(t)$ ein.
- Berechnen** Sie auch die Geschwindigkeit, die der Sprinter zum Zeitpunkt t_{max} erreicht hat. Was fällt Ihnen an dem Ergebnis auf?

