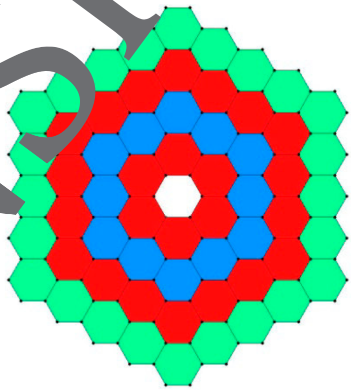
UNTERRICHTS MATERIALIEN

Wahrscheinlichkeitsrechnung und Statistik Sek I/II



Stochastik bei einer Parkettierung mit Sechsecken

Aufgaben zu Wahrscheinlichkeit, Analysis und Geometrie

RAABE,
KLASSE SCHULE

Impressum

RAABE UNTERRICHTS-MATERIALIEN Wahrscheinlichkeitsrechnung und Statistik Sek I/II

Dr. Josef Raabe Verlags-GmbH
Ein Unternehmen der Klett Gruppe
Rotebühlstraße 77
70178 Stuttgart
Telefon +49 711 62900-0
Fax +49 711 62900-60
meinRaabe@raabe.de
www.raabe.de

Redaktion: Schirin Orth
Satz: Röser MEDIA GmbH & Co. KG, Fritz-Erler-Straße 25, 76133 Karlsruhe
Illustrationen: Günther Weber
Bildnachweis Titel: Günther Weber
Lektorat: Mona Hitzenauer

Stochastik bei einer Parkettierung mit Sechsecken

In einem Behälter liegen verschiedenfarbige reguläre Sechsecke mit der Seitenlänge 1 cm. Ausgehend von einem Sechseck wird anschließend ein Ring aus gleichfarbigen Sechsecken um dieses Ausgangssechseck gelegt (Ring 1), anschließend ein weiterer Ring aus gleichfarbigen Sechsecken um Ring 1 (Ring 2). Anschließend wird die Figur um zwei weitere Ringe (Ring 3 und Ring 4) auf die gleiche Weise erweitert.

Abbildung 1 zeigt Ring 1, beispielhaft gelegt mit roten Sechsecken und den Beginn der Erweiterung des 2. Ringes.

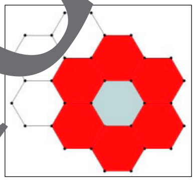


Abb. 1

Zur Information:
Bei einer Parkettierung (Pflasterung) wird die Ebene lückenlos und ohne Überlappungen durch eine Figur ausgefüllt.
Bei einem regulären oder gleichmäßigen Sechseck sind alle Seiten gleich lang und alle Innenwinkel gleich groß.

Es soll eine Parkettierung aus 4 Ringen gelegt werden. Zum Anlegen der „Sechseckringe“ werden Sechsecke in den Farben rot, blau und grün benutzt, wobei jede der Farben vorkommen muss.

1. Bestimmen Sie die Anzahl der Möglichkeiten, die 4 Ringe mit den 3 Farben zu legen.

Bei einer Parkettierung mit Ringen ist der 1. und 3. Ring rot, der 2. Ring blau und der 4. Ring grün. Nach dem Auslegen werden die **angelegten** Sechsecke aufgenommen und in einen Beutel gelegt (das Ausgangssechseck kommt also nicht mit in den Beutel).

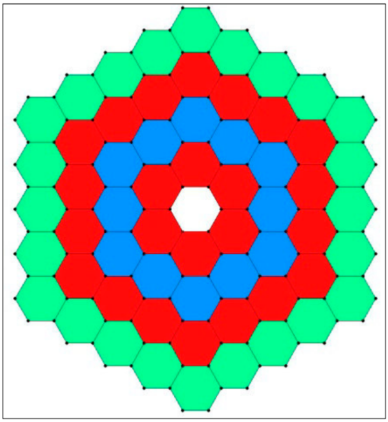


Abb. 2

2. Aus dem Beutel werden zufällig nacheinander 3 Sechsecke ohne Zurücklegen genommen. Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeiten für folgende Ereignisse:

   E1: Das 1. gezogene Sechseck ist rot, das 3. gezogene Sechseck ist blau.

   E2: Die 3 Sechsecke sind gleichfarbig.

   E3: Es wird kein grünes Sechseck gezogen.

   E4: Die 3 gezogenen Sechsecke sind verschiedenfarbig.

   E5: Es wird genau 2 Mal ein blaues Sechseck gezogen.

   E6: Es wird mindestens 1 Mal ein grünes Sechseck gezogen.

   E7: Es wird höchstens 2 Mal ein rotes Sechseck gezogen.

Bei den Aufgaben 3 bis 5 wird jetzt jeweils ein Sechseck gezogen und wieder zurückgelegt.

3. Bestimmen Sie die minimale Anzahl von Ziehungen die notwendig ist, damit man mit mindestens 99 %iger Sicherheit mindestens einmal ein blaues Sechseck zieht.

4. Aus dem Beutel wird 10 Mal ein Sechseck genommen und anschließend wieder zurückgelegt. Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass

4.1 kein rotes Sechseck gezogen wurde.

4.2 genau 7 Mal ein grünes Sechseck gezogen wurde.

4.3 wenigstens 4 Mal ein blaues Sechseck gezogen wurde.

4.4 mehr als 3 Mal und höchstens 5 Mal ein rotes oder blaues Sechseck gezogen wurde.

4.5 höchstens 2 Mal oder wenigstens 8 Mal kein blaues Sechseck gezogen wurde.

5. Aus dem Beutel wird 250 Mal ein Sechseck mit Zurücklegen gezogen. Schätzen Sie mithilfe einer σ-Umgebung mit einer Wahrscheinlichkeit von ca. 95 % ab, wie viele grüne Sechsecke gezogen werden.

Die roten Sechsecke in Ring 3 sollen durch andersfarbige Sechsecke ersetzt werden, sodass jetzt Ring 1 aus roten, Ring 2 aus blauen, Ring 3 aus orangen und Ring 4 aus grünen Sechsecken besteht. Die **angelegten** Sechsecke werden wiederum in einen Beutel gelegt und dann 5 Mal mit Zurücklegen ein Sechseck aus dem Beutel genommen.

6. Nach jeder Ziehung wird die Nummer des Ringes, in dem das Sechseck ursprünglich lag, von links nach rechts nebeneinander notiert, sodass eine 5 stellige Zahl entsteht.
   Beispiel: Zieht man nacheinander ein rotes, oranges, grünes, rotes und blaues Sechseck wurde die Zahl 13412 notiert.
   Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass die notierte Zahl

6.1 größer als 32423 ist.

6.2 kleiner als 21123 ist.

7. Die Sechsecke werden für ein Spiel genutzt.

   Spielvariante 1
   Der Einsatz beträgt 2 €. Es wird ein Sechseck gezogen. Bei einem roten Sechseck werden 4 €, bei einem blauen 3 €, bei einem orangen 2 € und bei einem grünen 1 € ausbezahlt.

   Spielvariante 2
   Der Einsatz beträgt [illegible] €. Es werden 2 Sechsecke mit Zurücklegen gezogen. Ausgezahlt werden bei gleichfarbigen Sechsecken 7 €, bei genau einem roten Sechseck 5 € und sonst nichts.Überprüfen Sie, welche der Spielvarianten ein Spieler wählen sollte.

Melanie findet das Sechseckmuster langweilig. Sie möchte die Sechsecke einschließlich des Ausgangssechsecks durch Kreise ersetzen und die Kreise dann durch einen größeren Kreis einschließen (siehe nebenstehende Abbildung 3). Die Kreise bilden somit auch wieder Ringe um einen Ausgangskreis und können als Kreise von Ring 1, Kreise von Ring 2 usw. bezeichnet werden.

Anmerkung: Es handelt sich jetzt nicht mehr um eine Parkettierung, da die Ebene nicht lückenlos ausgefüllt wird.

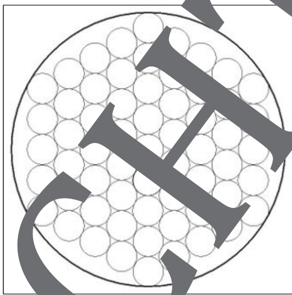


Abb. 3

Ein Leuchtpunkt ist so eingestellt, dass er zufällig an einer Position innerhalb des umgebenden Kreises aufleuchtet.

8. Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass der Punkt

8.1 auf einer der inneren Kreisflächen aufleuchtet.

8.2 innerhalb eines Kreises von Ring 3 aufleuchtet.

8.3 innerhalb eines Kreises von Ring 2 aufleuchtet, wenn bekannt ist, dass der Punkt innerhalb eines inneren Kreises aufgeleuchtet ist.

8.4 innerhalb der Fläche zwischen den inneren Kreisen aufleuchtet, wenn bekannt ist, dass er nicht innerhalb eines inneren Kreises aufgeleuchtet ist.

9. Die Parkettierung der Sechsecke bzw. die inliegenden Kreise werden bis auf 10 Ringe erweitert und die jeweilige Erweiterung durch einen Kreis umschlossen.

9.1 Bestimmen Sie für jede Erweiterung die Wahrscheinlichkeit, dass ein Leuchtpunkt in einem inneren Kreis aufleuchtet.

9.2 Stellen Sie eine Vermutung auf, welchen Wert die Wahrscheinlichkeit für einen Leuchtpunkt in inneren Kreisen annimmt, wenn man die Erweiterung beliebig weiterführt und anschließend die Erweiterung durch einen Kreis umschließt.

Kompetenzprofil

- Niveau: grundlegend / weiterführend
- Fachlicher Bezug: Geometrie, Stochastik, Analysis
- Kommunikation: Vermutungen äußern
- Problemlösen: vernetztes Denken
- Modellierung: Modell entwickeln
- Medien: Farbfolie, Excel-Dateien
- Methode: Partnerarbeit, Gruppenarbeit
- Inhalt in Stichworten: Ziehen mit und ohne Zurücklegen, (verknüpfte) Ereignisse, vereinfachtes Baumdiagramm, Laplace-Zufallsversuch, Formel von Bernoulli, bedingte Wahrscheinlichkeit, Erwartungswert, faires Spiel, σ-Intervall, geometrische Wahrscheinlichkeit, Übergangsmatrix, Flächeninhalt Kreis, Satz des Pythagoras, Folgen und Reihen, Grenzwert

Autor: Günther Weber

Methodisch-didaktische Hinweise

Bei Aufgabe 1 wird aufgrund des Umfangs des Baumdiagramms nur der Zweig in der Lösung aufgenommen, bei dem der 1. Ring rot ist. Im Unterricht kann das Baumdiagramm gruppenweise gezeichnet werden, indem eine 2. Gruppe mit einem blauen Ring und eine 3. Gruppe mit einem grünen Ring beginnt. Die Anzahl der Möglichkeiten werden dann zusammengetragen. Liegt nur das Baumdiagramm mit einem roten ersten Ring vor, so kann im Unterrichtsgespräch geklärt werden, dass die Anzahl der Möglichkeiten beim Beginn mit einer anderen Farbe genauso groß ist.

Bei Aufgabe 2 kann die Bestimmung der Anzahl der roten, blauen und grünen Sechsecke durch das Herausfinden einer Gesetzmäßigkeit, oder bei leistungsschwächeren Lerngruppen durch Abzählen der Sechsecke der einzelnen Farben erfolgen. Da die Aufgabe auch schon in der Mittelstufe bearbeitet werden kann, bietet sich hier der Weg durch Abzählen an. Beim Zeichnen der Baumdiagramme sollte darauf geachtet werden, dass verkürzte Baumdiagramme gezeichnet werden, da hierdurch die Übersichtlichkeit deutlich erhöht wird.

Bei Aufgabe [illegible] kann die Lösung differenziert erfolgen. Eine Gruppe bearbeitet die Aufgabe, indem der ausbezahlte Betrag als Zufallsvariable festgelegt wird, die andere Gruppe wählt den Gewinn als Zufallsvariable.

Aufgabenteil 8d dient zur Differenzierung nach Leistungsstärke.

Gegebenenfalls sollten vorher noch einmal die Formeln für die Höhe und den Flächeninhalt eines gleichseitigen Dreiecks wiederholt werden. Ebenso könnte noch einmal auf die unterschiedlichen Lagen des Leuchtpunktes (innerhalb eines inneren Kreises; zwischen den inneren Kreisen, innerhalb des umschließenden Kreises, aber nicht zwischen den Kreisen) näher eingegangen werden.

Lösung

1. Lösung mithilfe eines Baumdiagramms:

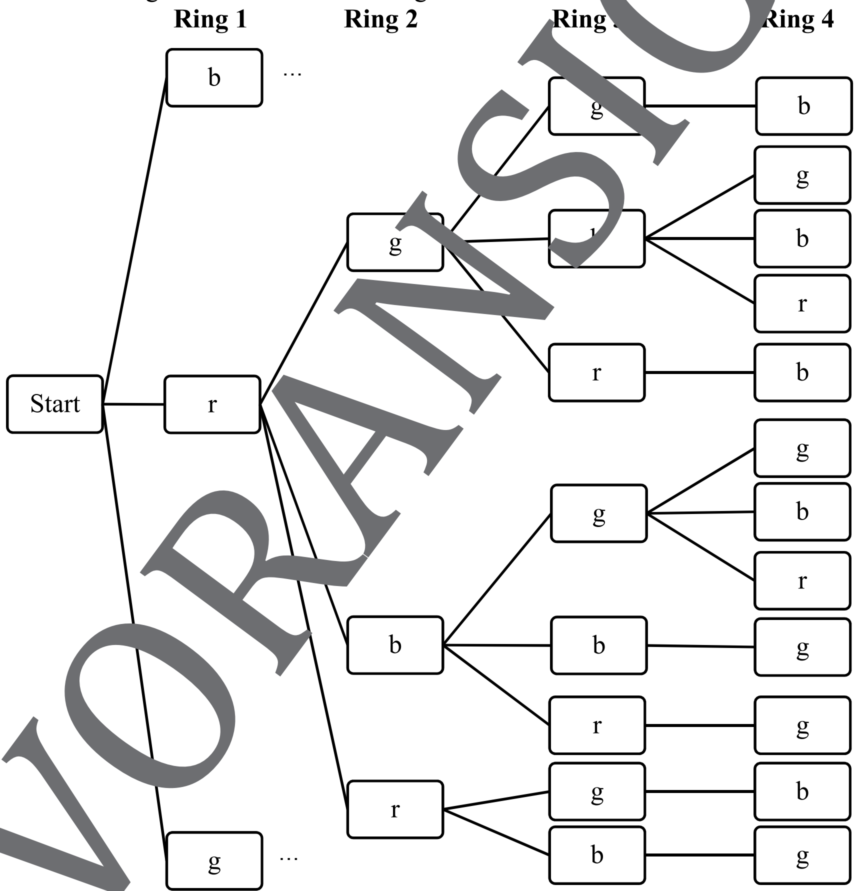


Abb. 4

Ein Baumdiagramm, beginnend mit einem roten erstem Ring, zeigt, dass es 12 Möglichkeiten gibt, 4 Sechseckringe mit den 3 Farben zu legen.
Da die Anzahl der Möglichkeiten bei einem ersten blauen oder grünen Ring genau so groß ist, gibt es insgesamt $12 \cdot 3 = 36$ Möglichkeiten 4 Ringe mit 3 Farben zu legen.

Kombinatorische Lösung

Es gibt insgesamt $\binom{4}{2} = 6$ Möglichkeiten aus 4 Ringen 2 Ringe auszuwählen, die anschließend die gleiche Farbe besitzen. Da jede Farbe vorkommen muss, gibt es insgesamt $3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$ Möglichkeiten die 3 Farben auf den Doppelring und die beiden Einzelringe zu verteilen. Insgesamt gibt es $6 \cdot 6 = 36$ Möglichkeiten 4 Ringe mit 3 Farben zu legen.

2. Verbindet man die Mittelpunkte der Sechsecke der anliegenden Ringe, so bilden diese wiederum Sechsecke. Die Anzahl der Sechsecke vergrößert sich von Ring zu Ring jeweils um 6 Sechsecke. Die Sechsecke des 1. Ringes liegen an dem Ausgangssechseck an. Ring 1 enthält somit 6 rote Sechsecke. Ring 2 enthält dann 12 blaue, Ring 3 18 rote und Ring 4 24 grüne Sechsecke.

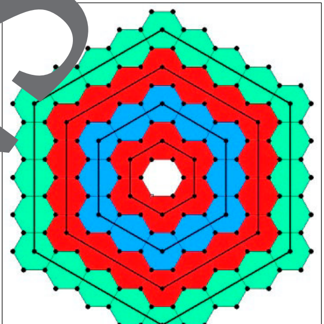


Abb. 5

Farbe	rot	blau	grün	insgesamt
Anzahl	6 + 18 = 24	12	24	60

Das Ziehen eines Sechsecks kann als Zufallsversuch aufgefasst werden, bei dem alle Ergebnisse (Elementarereignisse) des Ergebnisraumes Ω gleichwahrscheinlich sind (Laplace-Experiment). Die Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses A erhält man, indem man die Mächtigkeit von A durch die Mächtigkeit von Ω teilt.

$$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{\text{Anzahl der günstigen Fälle}}{\text{Anzahl der möglichen Fälle}}$$

Nach dem Zeichnen eines Baumdiagramms berechnet sich die Wahrscheinlichkeit der Ereignisse mithilfe der Pfadmultiplikations- und Pfadadditionsregel.

Ereignis E1

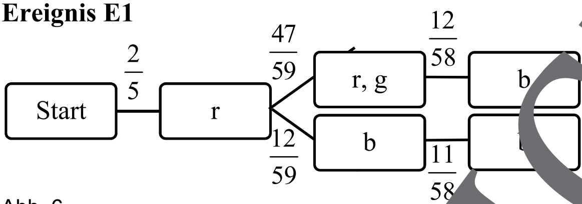


Abb. 6

$$P(E1) = \frac{2}{5}\cdot\frac{47}{59}\cdot\frac{12}{58} + \frac{2}{5}\cdot\frac{12}{59}\cdot\frac{11}{58} = \frac{1392}{17110} = \frac{696}{8555} \approx 0,081$$

Ereignis E2

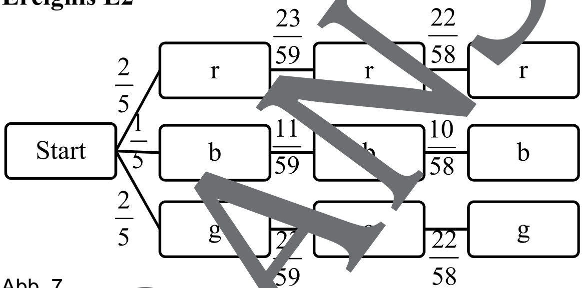


Abb. 7

$$P(E2) = \frac{2}{5}\cdot\frac{23}{59}\cdot\frac{22}{58} + \frac{1}{5}\cdot\frac{11}{59}\cdot\frac{10}{58} + \frac{2}{5}\cdot\frac{23}{59}\cdot\frac{22}{58} = \frac{2134}{17110} = \frac{1067}{8555} \approx 0,125$$

Ereignis E3

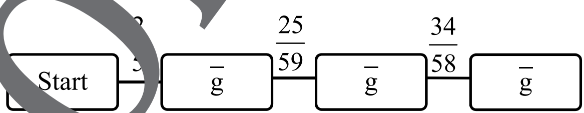


Abb. 8

$$P(E3) = \frac{3}{5}\cdot\frac{35}{59}\cdot\frac{34}{58} = \frac{3570}{17110} = \frac{357}{1711} \approx 0,209$$