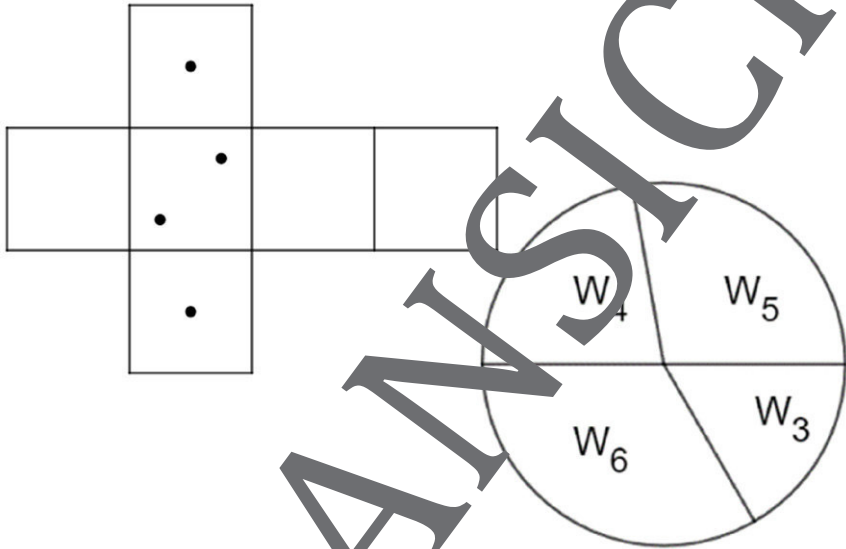


B.2.35

Mehrstufige Zufallsexperimente und Pfadregeln

Stochastik beim Spiel mit vier Würfeln und einem Glücksrad

Günther Weber



Abhängig von festgelegten Bedingungen lässt sich die fehlende Bepunktung von Würfeln auf verschiedene Arten durchführen, wobei bestimmte Punktezahlen auch mehrfach vorkommen dürfen. Zu den resultierenden Würfeln berechnen die Schülerinnen und Schüler die Wahrscheinlichkeitsverteilung und Varianz berechnet. Zusätzlich bestimmen sie die (bedingten) Wahrscheinlichkeiten von zuvor definierten Ereignissen zu einem Würfel oder sie vergleichen die Wahrscheinlichkeiten bei den einzelnen Würfeln. Sie benutzen hierzu Baumdiagramme sowie die Binomial- bzw. hypergeometrische Verteilung. Passend zu den Würfeln wird ein Glücksrad erstellt, sodass einer davon „erdreht“ werden kann. In Kombination von Glücksrad und Würfeln werden dann wiederum Ereignisse definiert und die Wahrscheinlichkeiten bestimmt. Zudem überprüfen die Jugendlichen, ob ein Spiel mit Glücksrad und Würfeln fair ist und sie schätzen die Anzahl der Spiele für einen gewissen Gewinn ab.

KOMPETENZPROFIL

| | |
|------------------------------|--|
| Klassenstufe: | 11/12/13 |
| Dauer | 4–5 Unterrichtsstunden |
| Kompetenzen: | Probleme mathematisch lösen, mathematisch modellieren mit symbolischen, formalen und technischen Elementen der Mathematik umgehen |
| Methoden: | Bilddbetrachtung, Computer- und Softwareeinsatz, Diagrammherstellung, Übung |
| Materialart | Differenzierungsmaterial, Textimpuls, Bildimpuls |
| Thematische Bereiche: | Erwartungswert, Varianz, Baumdiagramm, Pfadmultiplikations- und Pfadadditionsregel, (bedingte) Wahrscheinlichkeit, stochastisch (un-) abhängig, hypergeometrische Verteilung, Binomialverteilung, „3-mal mindestens“-Aufgabe, faires Spiel, σ -Umgebung |

Fachliche Hinweise

Ihre Klasse kennt verkürzte Baumdiagramme und die Pfadregeln. Die Lernenden berechnen ohne Schwierigkeiten Wahrscheinlichkeiten und bedingte Wahrscheinlichkeiten mit unterschiedlichen Lösungsverfahren. Die hypergeometrische Verteilung kann mithilfe der angegebenen Formel eingeführt werden.

Lehrplanbezug

In den Kernlernplänen NRW (https://www.schulentwicklung.nrw.de/lehrplaene/upload/klp_SII/m/KLP_GoSt_Mathematik.pdf, aufgerufen am 16.06.2025) sind im Inhaltsfeld „Stochastik“ unter anderem folgende Kompetenzerwartungen aufgeführt:

Die Schülerinnen und Schüler ...

- untersuchen Lage- und Streumaße von Stichproben,
- erläutern den Begriff der Zufallsgröße an geeigneten Beispielen,
- bestimmen den Erwartungswert μ und die Standardabweichung σ von Zufallsgrößen und treffen damit prognostische Aussagen,
- verwenden Urnenmodelle zur Beschreibung von Zufallsprozessen,

- beschreiben mehrstufige Zufallsexperimente und ermitteln Wahrscheinlichkeiten mithilfe der Pfadregeln,
- modellieren Sachverhalte mithilfe von Baumdiagrammen und Vier- oder Mehrfelder-
tafeln,
- bestimmen bedingte Wahrscheinlichkeiten
- verwenden Bernoulliketten zur Beschreibung entsprechender Zufallsexperimente,
- erklären die Binomialverteilung und berechnen damit Wahrscheinlichkeiten,
- nutzen Binomialverteilungen und ihre Kenngrößen zur Lösung von Problemsituationen,
- nutzen die σ -Regeln für prognostische Aussagen.

Didaktisch-methodische Hinweise

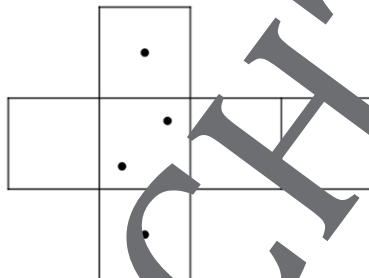
Nach der Bearbeitung von **Aufgabe 1)** sollten Ihre Schülerinnen und Schüler die vier verschiedenen Seitenergänzungen der Würfel vergleichen, die in den Folgeaufgaben auf diese zugegriffen wird. Die verschiedenen Würfel bieten dann Differenzierungsmöglichkeiten, indem die Aufgaben gruppenweise gelöst werden, und die Ergebnisse anschließend zusammengetragen werden. Dies kann z. B. bei **Aufgabe 1)**, **Aufgabe 5)** oder **Aufgabe 6)** geschehen. Bei **Aufgabe 2)** kann, sofern die Bestimmung der Varianz nicht bekannt ist oder sie lange nicht im Unterricht behandelt wurde, die Berechnung eingeübt / wiederholt werden. Bei **Aufgabe 4)** können Sie den Hinweis geben, dass der Unterschied nicht die Differenz bestimmt werden soll. Günstig ist es, wenn die Schülerinnen und Schüler die Wahrscheinlichkeit für den Unterschied mithilfe eines Baumdiagramms ermitteln, ehe sie die Wahrscheinlichkeiten der Ereignisse bestimmen. Bei **Aufgabe 6)** können Sie vor der Bearbeitung ein Beispiel für ein ganzzahliges Verhältnis geben. Aber auch wie bei Aufgabe 1) sollten nach der Bearbeitung von **Aufgabe 7a)** die Mittelpunktswinkel der Kreisbögen vor der Bearbeitung der weiteren Aufgaben verglichen werden. Vor der Bearbeitung von **Aufgabe 9d)** wird evtl. noch einmal der Begriff und die Berechnung einer σ -Umgebung wiederholt.

Aufgaben

M 1

Nebenstehende Abbildung zeigt das Netz eines Würfels; zwei Seiten sind jeweils mit einem Punkt, eine dritte Seite mit zwei Punkten versehen.

Die drei anderen Seiten des Würfels enthalten ebenfalls 1 bis 6 Punkte, wobei die Anzahl der Punkte auch auf diesen Seiten mehrfach vorkommen kann.



Grafik: Günther Weber

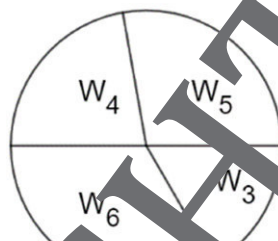
1. Versehen Sie alle Seiten des Würfels mit Punkten, sodass folgende Eigenschaften erfüllt sind:

- Beim einmaligen Werfen des Würfels ist der Erwartungswert für die Anzahl der Punkte 2.
 - Auf den sechs Seiten kommen genau drei verschiedene Anzahlen von Punkten vor.
- Zeigen Sie, dass der Würfel auf genau vier verschiedene Arten mit Punkten versehen werden kann.

Bei den folgenden Aufgaben werden die vier möglichen Würfel so bezeichnet, dass die größte Anzahl an Punkten auf den Seiten des Würfels den Namen des Würfels angibt. So enthält der Würfel W_3 wenigstens eine Seite mit 3 Punkten und keine Seite mit 4 oder mehr Punkten.

2. Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeitsverteilung für die vier Würfel und berechnen Sie die Varianz.
3. Einer der vier Würfel wird zweimal nacheinander geworfen. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit für das Ereignis E_1 : „Die Anzahl der Punkte ist beim zweiten Wurf größer als beim ersten Wurf“. Bestimmen Sie den Würfel, bei dem die Wahrscheinlichkeit für das Ereignis am größten ist.
4. Der Würfel W_5 wird zweimal nacheinander geworfen und der Unterschied der Punkte bei den beiden Würfeln bestimmt. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass bei 10-maliger Durchführung des Doppelwurfs folgendes Ereignis (= Unterschied der Punkte) eintritt:
 - E1: genau einmal das Ergebnis 3 eintritt.
 - E2: höchstens fünfmal das Ergebnis 1 eintritt.
 - E3: Mehr als zweimal und höchstens achtmal das Ergebnis gerade ist.
 - E4: höchstens viermal oder wenigstens neunmal das Ergebnis 0 ist.

Passend zu den vier Würfeln wird ein Glücksrad mit 4 Sektoren angefertigt, wobei die Sektoren mit den Bezeichnungen der Würfel beschriftet sind. Die Mittelpunktwinkel der Sektoren sind proportional zur größten Anzahl von Punkten auf den Würfeln.



Gratias Günther Weber

7.

- a) Bestimmen Sie den Mittelpunktwinkel der vier Sektoren.

- b) Das Glücksrad wird gedreht und anschließend der „erdrehte“ Würfel geworfen.

Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit für folgende Ereignisse:

E1: Es erscheint eine Fläche mit genau einem Punkt.

E2: Die Anzahl der Punkte auf der Fläche ist gerade.

E3: Die Anzahl der Punkte auf der Fläche ist eine Primzahl.

- c) Geworfen wurde eine Fläche

- mit zwei Punkten.
- mit einer Anzahl von Punkten, die durch 3 teilbar ist.

Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass beim Glücksrad der Sektor W_6 „erdreht“ wurde.

8. Bestimmen Sie die minimale Anzahl von Drehungen des Glücksrades und anschließendem Werfen des „erdrehten“ Würfels, damit man mit mindestens 95 %-iger Wahrscheinlichkeit mindestens einmal mindestens 6 Punkte wirft.

9. Ein Spieler schlägt ein neues Spiel vor: Das Glücksrad wird gedreht und der „erdrehte“ Würfel geworfen. Der Einsatz für das Spiel beträgt 2 €; ausbezahlt werden anschließend so viele Euro, wie der Würfel Punkte zeigt.

- a) Überprüfen Sie, ob das Spiel fair ist.

- b) Der Spieler zahlt bei einem Spiel 1 €. Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass der Würfel W_4 „erdreht“ wurde.

- c) Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass ein Spieler bei 10 Spielen

- i. genau zweimal 3 € gewinnt,

- ii. mehr als die Hälfte der Spiele keinen Gewinn macht

- d) Ein Spieler spielt 200 Mal. Schätzen Sie mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens 95 %, in welchem Intervall die Anzahl der Spiele liegt, bei denen man mindestens 2 € gewinnt.

Mehr Materialien für Ihren Unterricht mit RAAbits Online

Unterricht abwechslungsreicher, aktueller sowie nach Lehrplan gestalten – und dabei Zeit sparen.
Fertig ausgearbeitet für über 20 verschiedene Fächer, von der Grundschule bis zum Abitur: Mit RAAbits Online stehen redaktionell geprüfte, hochwertige Materialien zur Verfügung, die sofort einsetz- und editierbar sind.

- ✓ Zugriff auf bis zu **400 Unterrichtseinheiten** pro Fach
- ✓ Didaktisch-methodisch und **fachlich geprüfte Unterrichtseinheiten**
- ✓ Materialien als **PDF oder Word** herunterladen und individuell anpassen
- ✓ Interaktive und multimediale Lerneinheiten
- ✓ Fortlaufend **neues Material** zu aktuellen Themen



Testen Sie RAAbits Online
14 Tage lang kostenlos!

www.raabits.de

