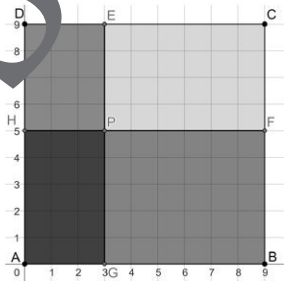
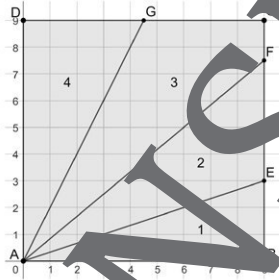
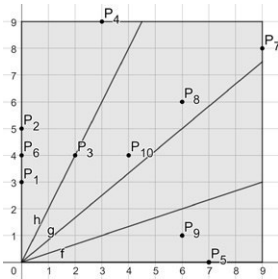


U.2.14

Stochastik und andere Gebiete der Mathematik

Geometrische Wahrscheinlichkeit und Punkte im Quadrat

Günther Weber



© Günther Weber

Der Begriff der Geometrischen Wahrscheinlichkeit wird mithilfe der Punkte mit ganzzahligen Koordinaten in einem vorgegebenen Quadrat bzw. der Punkte mit beliebigen Koordinaten in einer vorgegebenen Fläche hergeleitet. Zu den einzelnen Punkten bzw. zu den Flächen, die mit einer Zufallsversuchen verbunden werden Ereignisse definiert, deren (bedingte) Wahrscheinlichkeit die Lernenden mithilfe von Baumdiagramme (Tabellen) sowie der Binomialverteilung bestimmen. Durch einen Punkt im Inneren eines Quadrates werden Parallelen zu den Koordinatenachsen eingezeichnet, sodass das Quadrat in vier Teilflächen aufgeteilt wird. Betrachtet man die rechte obere Teilfläche des Quadrates, so kann die Anzahl der inneren Punkte, der Flächeninhalt oder der Umfang dieser Teilfläche betrachtet werden. Die Wahrscheinlichkeit entsprechender Ereignisse zu dieser Fläche wird teilweise mithilfe der Methode der Analysis bestimmt.

KOMPETENZPROFIL

Klassenstufe:	11/12/13
Dauer:	6–8 Unterrichtsstunden (abhängig von der Dauer der Simulationen)
Kompetenzen:	Probleme mathematisch lösen, mathematisch modellieren, mit symbolischen, formalen und technischen Elementen der Mathematik umgehen
Methoden:	Bildanalyse, Computer- und Softwareeinsatz, Übung
Materialart:	Arbeitsblatt, Bildimpuls, Excel, GeoGebra, Internet, Differenzierungsmaterial
Thematische Bereiche:	Geometrische Wahrscheinlichkeit, Laplace-Wahrscheinlichkeit, Erwartungswert, Varianz, Boxplot, Diagramm, Baumdiagramm, Pfadmultiplikations- und Pfadadditionsregel, (bedingte) Wahrscheinlichkeit, Binomialverteilung, Normalverteilung, „dreimal mindestens“ Aufgaben, faires Spiel, Additionssatz für Wahrscheinlichkeiten, σ -Umgebung, lineare Funktionen, Nullstelle, Integral, Grenzwert

© RAABE 2025

Hinweise

Vorwissen

Die Lernenden ihrer Klasse können Simulationen (mithilfe einer Tabellenkalkulation) durchführen und die Ergebnisse auswerten. Ebenso können sie die Daten in einem Boxplot-Diagramm visualisieren. Sie kennen verkürzte Baumdiagramme und die Pfadregeln und berechnen mit diesen ohne Schwierigkeiten (bedingte) Wahrscheinlichkeiten. Die Jugendlichen wissen um die Bedeutung der Parameter n und p bei einer Binomialverteilung und die Bedeutung der Parameter μ und σ bei der Normalverteilung. Ebenso können sie mithilfe der Parameter μ und σ Schätzungen durchführen.

Lehrplanbezug

In den Kernlernplänen NRW (https://www.schulentwicklung.nrw.de/lehrplaene/upload/klp_SII/m/KLP_GoSt_Mathematik.pdf, aufgerufen am 22.08.2025) sind im Inhaltsfeld „Stochastik“ unter anderem folgende Kompetenzerwartungen aufgeführt:

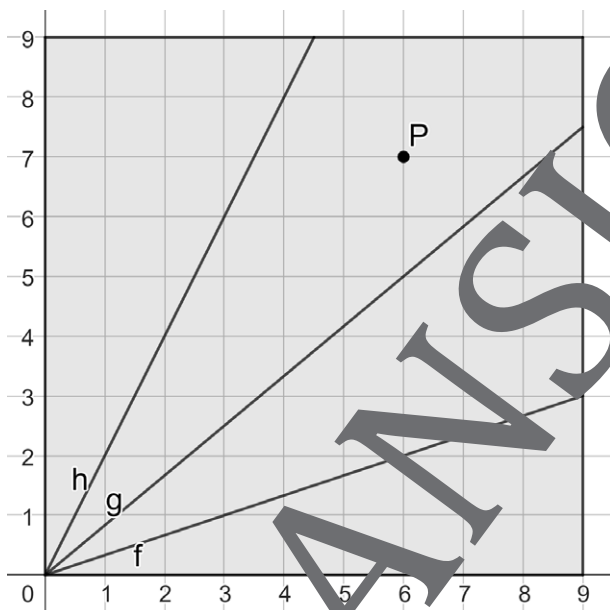
Die Schülerinnen und Schüler ...

- untersuchen Lage- und Streumaße von Stichproben, erläutern den Begriff der Zufallsgröße an geeigneten Beispielen,
- bestimmen den Erwartungswert μ und die Standardabweichung σ von Zufallsgrößen und treffen damit prognostische Aussagen,
- verwenden Urnenmodelle zur Beschreibung von Zufallsprozessen,
- beschreiben mehrstufige Zufallsexperimente und ermitteln Wahrscheinlichkeiten mithilfe der Pfadregeln,
- modellieren Sachverhalte mithilfe von Baumdiagrammen und Vier- oder Mehrfelder- tafeln,
- bestimmen bedingte Wahrscheinlichkeiten,
- verwenden Bernoulliketten zur Beschreibung entsprechender Zufallsexperimente,
- erklären die Binomialverteilung und ermitteln damit Wahrscheinlichkeiten,
- nutzen Binomialverteilungen und ihre Kenngrößen zur Lösung von Problemstellungen,
- beschreiben den Einfluss der Parameter μ und σ auf die Normalverteilung und die graphische Darstellung ihrer Dichtefunktion (Gaußsche Glockenkurve),
- nutzen die σ -Regeln für prognostische Aussagen.

Aus dem Bereich der Analysis werden lineare Funktionen, Nullstellen, Extremwertprobleme und Bestimmung von Integralen angesprochen.

M 1 Aufgaben

Ein Quadrat mit der Seitenlänge 9 cm liegt im 1. Quadranten eines Koordinatensystems mit der unteren linken Ecke im Ursprung. Vom Ursprung ausgehend wird das Quadrat durch drei Strecken, wobei der Endpunkt auf dem Rand des Quadrates liegt, in vier Bereiche unterteilt.



Grafik: Günther Weber

Im Folgenden wird dieses Quadrat als Ausgangsquadrat genannt. Zufällig wird im Quadrat oder auf dem Rand des Quadrates ein Punkt mit ganzzahligen Koordinaten erzeugt. Dies geschieht in GeoGebra durch den Befehl

$$P=(\text{Zufallszahl}(0,9)+zz \cdot 10^{(-8)}, \text{Zufallszahl}(0,9)+zz \cdot 10^{(-8)}),$$

wobei zz ein Schieberegler ist, der die Zahl 0 oder die Zahl 1 annehmen kann. Durch Veränderung der Position im Schieberegler werden dann jeweils neue Zufallszahlen manuell oder durch Animation des Schieberegler automatisch erzeugt.

Teil A:

- Erzeugen Sie mit der GeoGebra-Datei „10 Punkte im Ausgangsquadrat.ggb“ insgesamt 100 Punkte, indem Sie die Animation des Schiebereglers zz starten und tragen Sie in der folgenden Tabelle für jeden Punkt ein, ob der Punkt auf dem Rand des Quadrates (R eintragen) bzw. innerhalb des Quadrates auf einer der Strecken (S eintragen) liegt.

Simulation	P1	P2	P3	P4	P5	P6	P7	P8	P9	P10
1										
2										
3										
4										
5										
6										
7										
8										
9										
10										

Bestimmen Sie die relative Häufigkeit, dass ein Punkt auf dem Rand des Quadrates bzw. auf einer der Strecken liegt.

- Mithilfe der Excel-Datei „Punkte auf dem Rand.xlsx“ können 1000 Punkte des Ausgangsquadrates mit ganzzahligen Koordinaten erzeugt werden. Erzeugen Sie mit zehn Simulationen 10 000 Punkte und stellen Sie fest, wie viele Punkte auf dem Rand des Quadrates liegen. Tragen Sie die Werte in folgende Tabelle ein.

Tip: Drücken Sie für jede neue Simulation z. B. die Taste F9 (aktualisieren).

	Sim 1	Sim 2	Sim 3	Sim 4	Sim 5	Sim 6	Sim 7	Sim 8	Sim 9	Sim 10
Anzahl Punkte auf dem Rand										

- Bestimmen Sie den Mittelwert der Anzahl der Punkte auf dem Rand.
- Zeichnen Sie ein Boxplot-Diagramm für die Anzahl der Punkte auf dem Rand.

Mehr Materialien für Ihren Unterricht mit RAAbits Online

Unterricht abwechslungsreicher, aktueller sowie nach Lehrplan gestalten – und dabei Zeit sparen.
Fertig ausgearbeitet für über 20 verschiedene Fächer, von der Grundschule bis zum Abitur: Mit RAAbits Online stehen redaktionell geprüfte, hochwertige Materialien zur Verfügung, die sofort einsetz- und editierbar sind.

- ✓ Zugriff auf bis zu **400 Unterrichtseinheiten** pro Fach
- ✓ Didaktisch-methodisch und **fachlich geprüfte Unterrichtseinheiten**
- ✓ Materialien als **PDF oder Word** herunterladen und individuell anpassen
- ✓ Interaktive und multimediale Lerneinheiten
- ✓ Fortlaufend **neues Material** zu aktuellen Themen



Testen Sie RAAbits Online
14 Tage lang kostenlos!

www.raabits.de

