

C.1.47

Kombinatorik und Laplace-Wahrscheinlichkeit

Der Zufall mit 20 Seiten – Wahrscheinlichkeitsrechnung mit einem Ikosaeder

Günther Weber



© RAABE 2026 | Es gelten die [Lizenzbedingungen](#)

© Danielle Scott / Wikimedia Commons / CC BY-SA 2.0

Die Lernenden benutzen Zahlen eines fairen Ikosaeders, um Ereignismengen zu bestimmen und Wahrscheinlichkeiten zu ermitteln. Auf die Ereignismengen wenden die Jugendlichen bestimmte Mengenoperationen an, die sich auch bei der Berechnung von bedingten Wahrscheinlichkeiten wiederfinden. Betrachtet man zusätzlich zu den einzelnen gewürfelten Zahlen noch die (ungeraden) Zahlen der Flächen, die an die gewürfelte Fläche anliegen, so lassen sich hierzu weitere Aufgaben (Berechnung von Wahrscheinlichkeiten, Dreimal-mindestens-Aufgabe, Spiel) stellen. Gleiches ist möglich, wenn man die 12 Ecken des Ikosaeders nimmt und die fünf Zahlen der anliegenden Dreiecksflächen betrachtet.

KOMPETENZPROFIL

Klassenstufe:	6–8 Unterrichtsstunden
Kompetenzen:	Probleme mathematisch lösen (K2), mathematisch modellieren (K3), mathematische Darstellungen verwenden (K4), mit mathematischen Objekten umgehen (K5)
Methoden:	Bastelarbeit, Bildbetrachtung, Computer- und Softwareeinsatz, Diagrammerstellung, Übung
Materialart:	Anleitung, Arbeitsblatt, Bildimpuls, Differenzierungsmaterial, Textimpuls
Thematische Bereiche:	Mengenoperationen bei Ereignismengen, Baumdiagramme, Laplace-Wahrscheinlichkeit, bedingte Wahrscheinlichkeit, Bernoulli-Experiment, dreimal mindestens Aufgabe, faires Spiel, stochastische Abhängigkeit, Vierfeldertafel, Schätzen mit der σ -Umgebung

Didaktisch-methodische Hinweise

Lernvoraussetzungen:

Aus dem Bereich der Stochastik beherrschen die Lernenden das Zeichnen von Baumdiagrammen und die Pfadregeln. Ebenso sollten sie die Formel von Bernoulli kennen und anwenden können. Die Jugendlichen können die Wahrscheinlichkeitsverteilung bei einem Zufallsversuch bestimmen; sie sind mit dem Erwartungswert und der Streuung einer Zufallsvariable vertraut und wissen, wann ein Spiel fair ist.

Lehrplanbezug:

In den Kernlernplänen NRW (https://lehrplannavigators.nrw.de/system/files/media/document/file/klp-entwurf_vb_sii_gost_mathematik_1.pdf, aufgerufen am 07.01.2026) sind im Inhaltsfeld „Stochastik“ unter anderem folgende Kompetenzerwartungen aufgeführt:

Die Schülerinnen und Schüler ...

- untersuchen und beurteilen Stichproben mithilfe von Lage- und Streumaßen,
- erläutern den Begriff der Zufallsgröße an geeigneten Beispielen,
- bestimmen und deuten den Erwartungswert, die Varianz und die Standardabweichung von diskreten Zufallsgrößen,
- verwenden Urnenmodelle (Ziehen mit und ohne Zurücklegen) zur Beschreibung von Zufallsprozessen,
- bestimmen das Gegenereignis \bar{A} , verknüpfen Ereignisse durch die Operationen $A \setminus B$, $A \cap B$, $A \cup B$ und bestimmen die zugehörigen Wahrscheinlichkeiten,
- beschreiben mehrstufige Zufallsexperimente mithilfe von Baumdiagrammen und Vierfeldertafeln und berechnen damit Wahrscheinlichkeiten,
- lösen Problemstellungen im Kontext bedingter Wahrscheinlichkeiten,
- erklären die Binomialverteilung und beschreiben den Einfluss der Parameter n und p auf die Binomialverteilung, ihre Kenngrößen und die graphische Darstellung,
- ermitteln mithilfe der σ -Regeln Prognoseintervalle für die absoluten und relativen Häufigkeiten in einer Stichprobe und interpretieren diese im Sachkontext.

Anwendung im Unterricht:

Liegen Ikosaederwürfel vor (sie können z. B. bestellt werden unter <https://schmidt-lehrmittel.de/mathe-unterrichtsmaterial-fuer-die-grundschule/zahlenraum-bis-20/409/ziffernwuerfel-1-20-sortiment-a-10stk> (aufgerufen am 07.01.2025)), so kann auf das Basteln unter **Aufgabe 1a)** verzichtet werden. Das Basteln des Körpers und das Betrachten des Netzes erleichtert jedoch das Auffinden der Zahlen, die auf den anliegenden Flächen bzw. den Flächen, die am Eckpunkt anliegen, stehen. **Aufgabe 2c)** (LearningApp) setzen Sie insbesondere bei leistungsschwächeren Lerngruppen schon während der Bearbeitungszeit zur Kontrolle ein. Einige verknüpfte Ereignisse können hierbei auch als Differenzierungsaufgabe eingesetzt werden. Setzen Sie bei **Aufgabe 3)** das Ereignis E7 als Differenzierungsaufgabe ein. Der Einsatz einer Multiplikationstabelle (siehe das Tabellenblatt „Multiplikationstabelle“ der Datei „Ikosaeder.xlsx“) ist hilfreich.

Vergleichen Sie bei **Aufgabe 5)** und bei **Aufgabe 7)** die Zahlen der angrenzenden Flächen bzgl. der ausgewählten Fläche bzw. des ausgewählten Eckpunktes vor der Bearbeitung der einzelnen Ereignisse. Ebenso geschieht dies bei **Aufgabe 6)** mit der Anzahl der Punkte. Evtl. stellen Sie den Lernenden eine Exceltabelle zur Verfügung. Bei **Aufgabe 7)** sind die Ereignisse E4, E5 und E6 als Differenzierungsaufgabe vorgesehen. Insbesondere hier bietet sich der Einsatz einer Tabellenkalkulation an.

Die Schüler lernen:

die Mengenoperationen (Komplementär- Vereinigungs- und Schnittmenge) auf vorher bestimmte Ereignismengen anzuwenden und nutzen sie zur Berechnung von bestimmten Wahrscheinlichkeiten. Ebenso verwenden Sie die Pfadregeln zur Berechnung von Wahrscheinlichkeiten in zwei- bzw. mehrstufigen Zufallsexperimenten. Vergrößert sich die Anzahl der Laplace-Zufallsexperimente, so setzen die Jugendlichen die Formel von Bernoulli ein. Ebenso überprüfen sie bei einem Laplace-Zufallsexperiment, ob ein durchgeführtes Spiel fair ist.

Auf einen Blick**Wahrscheinlichkeitsrechnung mit einem Ikosaeder**

M 1	Bastelvorlage
M 2	Mengenoperationen
M 3	Aufgaben

Erklärung zu den Symbolen

 leichtes Niveau	 mittleres Niveau	 schwieriges Niveau
 Zusatzaufgabe	 Alternative	

M 2 Mengenoperationen

Der Ergebnisraum Ω umfasst alle möglichen Ergebnisse eines Zufallsexperiments. Jede Teilmenge des Ergebnisraums beschreibt ein Ereignis.

Durch Komplementbildung oder durch Verknüpfung (Vereinigungs- oder Schnittmenge) einzelner Ereignisse entstehen neue Ereignisse als Teilmenge des Ergebnisraums. Zusammengesetzte Ereignisse kann man als logische Kombination von einfachen Ereignissen betrachten, die man z. B. mit Venn-Diagrammen veranschaulichen kann.

Ausgehend von den Ereignissen A bzw. B ergeben sich folgende Ereignisse:

Gegeneignis / Komplementärmenge

Die Komplementärmenge \bar{A} umfasst alle Elemente aus einer gegebenen Ergebnismenge Ω , die nicht zur Menge A gehört.



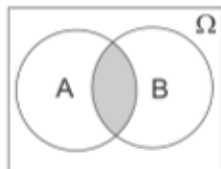
Vereinigungsmenge

Die Vereinigungsmenge $A \cup B$ enthält alle Elemente, die entweder zur Ereignismenge A, zu A und gleichzeitig B, oder zur Ereignismenge B gehören. Die Vereinigungsmenge entspricht damit **nicht dem sprachlichen, sondern dem logischen ODER**.



Schnittmenge

Die Schnittmenge $A \cap B$ enthält alle Elemente, die sowohl zur Ereignismenge A als auch zur Ereignismenge B gehören. Die Schnittmenge entspricht damit dem sprachlichen und logischen **UND**.



Grafiken: Mona Hitznauer

Aufgaben

M 3

- Fertigen Sie den Ikosaeder aus seinem Netz (Bastelvorlage M 1) an.
 - Bestimmen Sie die Anzahl der Flächen (F) sowie die Anzahl der Ecken (E) des Ikosaeders.
Der eulersche Polyedersatz besagt, dass die Summe aus der Anzahl der Flächen (F) und der Anzahl der Ecken (E) vermindert um die Anzahl der Kanten (K) immer den Wert 2 ergibt: $F + E - K = 2$
 - Berechnen Sie die Anzahl der Kanten des Ikosaeders mit dem eulerschen Polyedersatz.
- Beim Werfen eines Ikosaeders zählt die Zahl, die oben liegt.
 - Bestimmen Sie beim Werfen mit einem Laplace-Ikosaeder mit der Ergebnismenge $\Omega = \{1; 2; \dots; 19; 20\}$ die Ereignismenge folgender Ereignisse:
A: Die gewürfelte Zahl ist ungerade.
B: Die gewürfelte Zahl ist durch 3 oder 4 teilbar.
C: Die gewürfelte Zahl ist eine Primzahl.

Durch Anwenden der Mengenoperationen (Vereinigung, Durchschnitt, Komplement) entstehen neue Ereignisse.

- Geben Sie die Ereignismenge folgender Ereignisse an:
 $A \cup B$, $A \cap C$, $\bar{A} \cap B$, $\bar{C} \cup B$, $\bar{A} \cap \bar{B}$, $A \cap (B \cup \bar{C})$, $(A \cap \bar{C}) \cup (\bar{A} \cap C)$, $\overline{A \cup B}$

- Überprüfen sie Ihre Lösung von Aufgabe 2b) mithilfe der LearningApp „Ereignisse und Ereignismengen beim Würfeln mit einem Ikosaeder“.

https://raabe.click/M3_A3_c

Verschieben Sie zu Anfang die Karten so, dass sie übersichtlich angeordnet sind.

Fügen Sie dann zwei Karten zusammen, von denen Sie annehmen, dass das Ereignis und die Ereignismenge zusammengehören. Hierzu ziehen Sie eine Karte auf die zweite, bis diese einen schwarzen Rahmen bekommt. Das Zusammenfügen der Karte wird sichtbar, indem die Karten durch einen „Klebestreifen“ verbunden werden. Kontrollieren Sie Ihre Zuordnung, indem Sie auf die Prüfschaltfläche klicken.



Ist die Zuordnung richtig, so erscheint um die beiden Karten ein grüner Rahmen, bei falscher Zuordnung ein roter Rahmen. Lösen Sie dann ggf. die Zuordnung, indem Sie auf den Klebestreifen klicken.

Links oben finden Sie zwei weitere Schaltflächen: Jene mit dem Fragezeichen blendet die Aufgabenstellung nochmals ein und die „Glühlampe“ gibt als Hilfestellung die Ereignismengen der Ereignisse A, B und C.