F.2.59

Binomialverteilung

Die hungrige Maus und mehr – binomialverteilte Zufallsgrößen betrachten

Karin Richter, Silvia Schöneburg



© Neil Lockhart / iStock / Getty Images Plus

Die hungrige Maus hat Schnupfen. Deshalb kann sie sich nicht auf ihren Geruchssinn verlassen, sondern muss an jeder Wegkreuzung nach Gutdünken entscheiden, ob sie links oder rechts geht. Sie geht nur vorwärts. Mit welcher Wahrscheinlichkeit wird sie den Käse finden? Hat sie überhaupt eine reale Chance?

Viele Zufallsexperimente lassen sich als eine Bernoulli-Kette der Länge n modellieren und führen dann auf eine Binomialverteilung. Das Labyrinth der Maus ist ein Beispiel dafür. Lassen Sie Ihre Schülerinnen und Schüler mit Excel die Einzelwahrscheinlichkeiten einer Binomialverteilung berechnen und das zugehörige Histogramm zeichnen.

© RAABE 2026 | Es gelten die Lizenzbedingungen

VORANSICHT

KOMPETENZPROFIL

Klassenstufe:	10
Dauer:	6 Unterrichtsstunden
Kompetenzen:	Probleme mathematisch lösen (K2), mathematisch modellieren (K3), mit mathematischen Objekten umgehen (K5)
Methoden:	Bildbetrachtung, Computer- und Softwareeinsatz, Diskussion, Schülerexperiment, Unterrichtsgespräch
Materialart:	Arbeitsblatt, Bildimpuls, Definition, Diagramm, Fiktionaler Text, Spiel, Tipp/Hilfestellung
Thematische Bereiche:	Binomialverteilte Zufallsgrößen, Prognose, Standardmodell, Bernoulli-Experiment, Bernoulli-Kette, Galton-Brett, Erwartungswert

Didaktisch-methodische Hinweise

Die experimentelle und selbst entdeckende Auseinandersetzung mit der hungrigen Maus macht die Schülerinnen und Schüler in einprägsamer Weise mit binomialverteilten Zufallsgrößen vertraut. Auch Schrotkörner, die durch ein Galton-Brett fallen, lernen die Schülerinnen und Schüler kennen. Zugleich werden am Labyrinth der Maus, einem Modell für eine Bernoulli-Kette, die wesentlichen Züge einer binomialverteilten Zufallsgröße deutlich.

Entdeckendes Lernen

Die Arbeitsblätter lassen viel Spielraum, selbstständig zu experimentieren und die gewonnenen Einsichten zu reflektieren. Anhand des Maus-Experimentes sollen die Schülerinnen und Schüler beschreiben, was eine Bernoulli-Kette ist, was sie unter einem Laplace-Modell verstehen und wie man eine Binomialverteilung darstellen kann (entweder tabellarisch oder durch ein Histogramm). Auch die beiden Pfadregeln im Baumdiagramm werden wiederholt. Schließlich erkennen die Lernenden, dass das Pascal'sche Dreieck eine Darstellung der Binomialkoeffizienten $\binom{n}{k}$ ist.

Theoretische Zusammenhänge werden anhand anschaulicher Beispiele verständlich. Dadurch kann man sie auf andere Bereiche übertragen. Die gedankliche Entwicklung erfolgt schrittweise – vom Spezialfall der symmetrischen Binomialverteilung hin zu einer allgemeinen Binomialverteilung, bei der $p \neq 1-p$ ist.

VORANSICHT

© RAABE 2026 | Es gelten die Lizenzbedingungen

Die Art der Aufgabenstellung fördert die Kompetenz des mathematischen Argumentierens und Kommunizierens. Die Arbeitsmaterialien sind so aufbereitet, dass sie unterschiedlichste Sozial- und Arbeitsformen zulassen.

Lerntagebuch

Setzen Sie ein Lerntagebuch ein. Dies bietet sich aufgrund des hohen Maßes an Selbsttätigkeit und entdeckendem Lernen bei der Auseinandersetzung mit diesem Beitrag an.
Mithilfe eines Lerntagebuches sollen die Schülerinnen und Schüler ihre individuellen Lernprozesse zum Themengebiet *Binomialverteilung* dokumentieren und reflektieren, Ideen, Gefühle, aber auch Fehler und Probleme festhalten. Es dient als Stütze bei selbst gesteuertem und kreativem Arbeiten, fordert und fördert gleichzeitig aber auch die Fähigkeit, seine Gedanken schriftlich ausdrücken zu können.
Weisen Sie die Schülerinnen und Schüler darauf hin, dass keineswegs fertige, stilistisch wohldurchdachte Texte erwartet werden. Im Gegenteil, Skizzen, Anmerkungen und auch unfertige Texte sind sogar erwünscht.
Natürlich bedarf auch der Umgang mit einem Lerntagebuch einer gewissen Zeit der Gewöhnung, bis man mit diesem Arbeitsmittel vertraut ist. Zeigen Sie Ihren Schülerinnen und Schülern Ausschnitte aus Lerntagebüchern. Erläutern Sie die Vor- und Nachteile einer solchen Dokumentationsweise und/oder geben Sie den Lernenden eine Art Strukturierungshilfe für ihre Lerntagebücher.
Die hier vorliegenden Arbeitsmaterialien unterstützen die Phase des Vertrautwerdens und geben zum Teil ganz genaue Aufträge, die im Lerntagebuch behandelt werden sollen. Achten Sie bitte darauf, dass das Lerntagebuch kontinuierlich geführt wird.

Ablauf

Das Material **M 1** führt die Schülerinnen und Schüler an Grundbegriffe der Stochastik heran. Sie wiederholen die Berechnung der relativen Häufigkeit und lernen anhand eines dem Urnenmodell nachempfundenen Versuches den Begriff *Bernoulli-Experiment* kennen. Sie erkennen, dass man in der Wahrscheinlichkeitsrechnung Prognosen aufstellt, um den Ausgang eines Versuches im Vorhinein abschätzen zu können. Diese Prognosen müssen dann auf experimentellem oder theoretischem Wege überprüft und gegebenenfalls revidiert werden.

© RAABE 2026 | Es gelten die Lizenzbedingungen

VORANSICHT

Das Labyrinth der Maus (oder Galton-Brett, **M 2 – M 4**) ist ein Modell für einen n-stufigen Zufallsversuch, wobei jedes Einzelexperiment genau zwei Ausgänge hat. Dies bezeichnet man als eine Bernoulli-Kette. Für eine solche Bernoulli-Kette der Länge n, $n \in \mathbb{N}$, mit Trefferwahrscheinlichkeit p gilt:

$$P(X=k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

Hierbei gibt die Zufallsgröße X die Anzahl der Treffer k mit $k \leq n$ an.

$\binom{n}{k}$ heißen *Binomialkoeffizienten*. Man sagt: Die Zufallsgröße X ist binomialverteilt. Die entsprechende Wahrscheinlichkeitsverteilung heißt **Binomialverteilung** $B_{n,p}$ mit den Parametern n und p.

$$P(X=k) = B_{n,p}(k)$$

Ideen-Puzzle

M 3 ist ein Ideen-Puzzle, bei dem es darum geht, die mathematischen Begriffe mit einem konkreten Beispiel zu verknüpfen. Als Orientierung dient die Maus-Aufgabe M 2.

Arbeit mit Excel im Computerraum

Das Material **M 4** stellt eine Verallgemeinerung von M 2 dar. Es ist zur Vertiefung gedacht. Während in M 2 ein Spezialfall der Binomialverteilung untersucht wurde (p = 1 – p = 1/2), geht es hier um die allgemeine Binomialverteilung ($p \neq (1-p)$). Aufgabe 1) stellt exemplarisch einen solchen Versuch vor. Die Lernenden machen anhand des Maus-Beispiels plausibel, wie man Binomialwahrscheinlichkeiten berechnet.
In Aufgabe 2) arbeiten sie mit der neuen Formel. Sie untersuchen mithilfe von **Excel**, wie sich die Veränderung des Parameters p auf das Ergebnis auswirkt. Excel erleichtert es, die Parameterabhängigkeit zu erkennen. Nichtsdestotrotz schadet es nichts, wenn die Schülerinnen und Schüler für eine Wahl des Parameters p die Aufgabe mit Papier und Bleistift lösen und auch ein Diagramm erstellen. So sind sie gezwungen, sich noch einmal intensiv mit der Formel auseinanderzusetzen. Dies dient der Festigung.

Textverständnis gefragt

Das Material **M 5** vertieft das Verständnis der Binomialverteilung. Der Qui(n)cunx entspricht dem Labyrinth der Maus. Der Kontext ist hier ein anderer. Es geht darum, sich einen historischen Text zu erschließen, anhand dessen man ein adäquates mathematisches Modell erstellt: den Qui(n)cunx. Galton ließ bei diesem Gerät eine große Zahl von Schrotkörnern durch eine Anordnung von Nadeln fallen. Der *Quincunx* war ursprünglich eine kleine römische Münze (lat. *quinque* (= fünf) und *uncia* (= Unze, eine Münzeinheit mit einem Wertpunkt, Gewichtsmaß 27,3 g). Die Bezeichnung

VORANSICHT

© RAABE 2026 | Es gelten die Lizenzbedingungen

steht für eine bestimmte Anordnung von fünf Punkten, wie wir sie vom Würfel kennen. Jeweils fünf Nadeln des Qui(n)cunx sind so angeordnet wie die fünf Punkte auf einem Würfel.
Mithilfe eines historischen Problems führen Sie in **M 6** den Erwartungswert $\mu = n \cdot p$ einer Binomialverteilung ein. Sie interpretieren ihn als gewichteten Mittelwert. Die Schülerinnen und Schüler beschäftigen sich hier mit einer Frage, die der französische Mathematiker Abraham de Moivre (1667–1754) in seiner Abhandlung *De mensura sortis, seu, de probabilitate eventuum in ludis a casu fortuito pendentibus* (1711) neben 25 weiteren Problemen betrachtet und gelöst hat:

A und B spielen mit einem Würfel. A gewinnt, wenn er bei 8 Würfen mindestens 2-mal eine Eins wirft. Fällt die Eins nur 1-mal oder gar nicht, gewinnt B.
Wie groß ist das Verhältnis der Chancen?

Das Material **M 7** lässt die Lernenden ihr Wissen auf einen anderen Kontext anwenden.
Als Weiterführung behandeln Sie **Varianz** und **Standardabweichung** einer Binomialverteilung.

Auf einen Blick

Die hungrige Maus und mehr – binomialverteilte Zufallsgrößen betrachten

M 1	Strumpf mit farbigen Chips – Ziehen mit Zurücklegen
M 2	Links oder rechts? – Wege-Problem einer hungrigen Maus
M 3	Der Maus auf der Spur – mathematisches Handwerkszeug
M 4	Ein „Linkspfoter" – unterschiedliche Wahrscheinlichkeiten
M 5	Francis Galton und sein Qui(n)cunx
M 6	Würfel und Gewichte – der Erwartungswert
M 7	Schulsprecher gesucht – das Gelernte anwenden

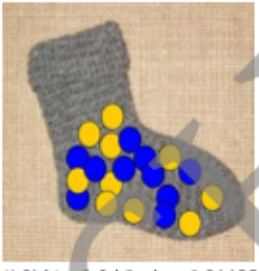
© RAABE 2026 | Es gelten die Lizenzbedingungen

VORANSICHT

M 1 Strumpf mit farbigen Chips – Ziehen mit Zurücklegen

Vorbereitung

Vor dir liegen gelbe und blaue Chips. Präpariere für deine Partnerin/deinen Partner versteckt einen Strumpf mit diesen Chips, und zwar so, dass der Strumpf insgesamt **genau 20 Chips** enthält. Tausche den Strumpf mit ihr/ihm. Ihr sollt beide eine **Prognose** (= Vorhersage) abgeben, wie viele gelbe und wie viele blaue Chips euer jeweiliger Strumpf enthält.



K. Richter, S. Schöneburg© RAABE

Folgendes Experiment hilft dir dabei:

Ziehen mit Zurücklegen

- Ziehe blind und willkürlich einen Chip aus dem Strumpf.
- Schreibe dir seine Farbe auf.
- Lege den Chip in den Strumpf zurück.
- Schüttele den Strumpf kräftig, damit sich sein Inhalt gut durchmischt.

Aufgabe

a) Wiederhole dieses Vorgehen so lange, bis du glaubst, eine gute Prognose über die Farbverteilung der Chips in deinem Strumpf abgeben zu können.

b) Kannst du deiner Vorhersage wirklich trauen? Fange mit der Untersuchung deines Strumpfes noch einmal von vorne an und verschaffe dir wie unter a) eine zweite Prognose. Diskutiere mit deiner Partnerin/deinem Partner, warum die beiden Prognosen unterschiedlich ausfallen können. Überlegt, wie eine Versuchsserie für eine sicherere Strumpf-Prognose aussehen müsste.

c) Überprüfe deine Prognose: Nimm alle 20 Chips auf einmal aus deinem Strumpf. Berechne für die nun vor dir liegenden 20 Chips die Wahrscheinlichkeit, aus diesem Haufen zufällig einen blauen/gelben Chip zu ziehen.

d) Vergleiche berechnete Wahrscheinlichkeit und Prognose. Was fällt dir auf? Formuliere, welche Gesetzmäßigkeit der Stochastik sich dahinter verbirgt.

Tipp

Fertige eine Tabelle an, in die du die Farbe des gezogenen Chips einträgst.
Gib für die Ziehungsserie die absolute und relative Häufigkeit an, einen blauen/gelben Chip zu ziehen.
Wie hängen relative Häufigkeit und Wahrscheinlichkeit zusammen?

VORANSICHT

© RAABE 2026 | Es gelten die Lizenzbedingungen