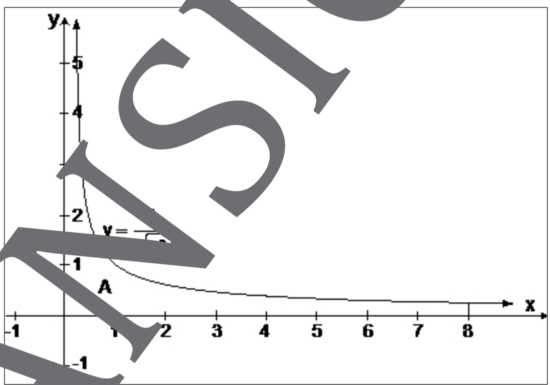
UNTERRICHTS MATERIALIEN

Analysis Sek. II



Das uneigentliche Integral

Definition und Anwendung auf Problemstellungen

RAABE
KLASSE SCHULE

Impressum

RAABE UNTERRICHTS-MATERIALIEN Analysis Sek II

Dr. Josef Raabe Verlags-GmbH
Ein Unternehmen der Klett Gruppe
Rotebühlstraße 77
70178 Stuttgart
Telefon +49 711 62900-0
Fax +49 711 62900-60
schule@raabe.de
www.raabe.de

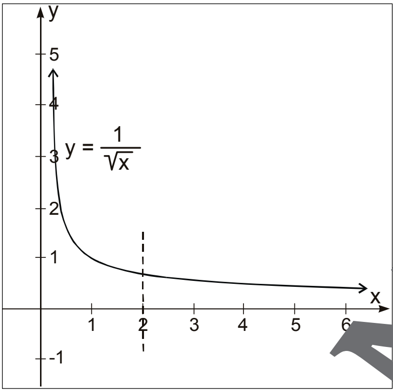
Redaktion: Schirin Orth
Satz: Röser MEDIA GmbH & Co. KG, Fritz-Erler-Straße 25, 76133 Karlsruhe
Illustrationen: Carlo Vöst
Bildnachweis Titel: Carlo Vöst
Korrektorat: Daniel Fässler

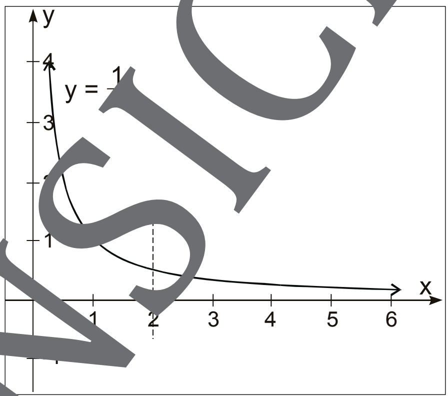
Das uneigentliche Integral

Unter uneigentlichen Integralen versteht man Integrale von folgenden Typen:

TYP 1: Der Integrand wird unendlich (d.h. er ist nicht beschränkt)

z.B.: $\int_0^2 \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx$ oder $\int_0^2 \frac{1}{x}\,dx$





Die Frage ist immer, ob der Graph der Integrandenfunktion nicht doch einen endlichen Flächeninhalt mit den Koordinatenachsen einschließt, obwohl der Integrand unendlich wird.
Man benützt dabei folgenden „Trick“:
Man integriert nicht ab „0“, sondern erst ab „h“ (h>0, aber „sehr klein“):

$$\int_h^2 \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx = \left[2\sqrt{x}\right]_h^2 = 2\sqrt{2} - 2\sqrt{h}$$

Es liegt nahe, zu definieren:

$$\int_0^2 \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx := \lim_{h\to 0+0} \int_h^2 \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx = \lim_{h\to 0+0}\left(2\sqrt{2} - 2\sqrt{h}\right) = 2\sqrt{2}$$

Der Flächeninhalt ist also endlich, obwohl die Randkurve unendlich lang ist.

Dagegen gilt: $\int_0^2 \frac{1}{x}\,dx = \lim_{h\to 0+0} \int_h^2 \frac{1}{x}\,dx = \lim_{h\to 0+0}\left[\ln x\right]_h^2 = \lim_{h\to 0+0}\left(\ln 2 - \ln h\right) = +\infty$

Das Integral divergiert.

Definition

Ist die Funktion f in $I = \{x \mid a \le x \le b\}$ mit Ausnahme der Stelle $x_0 \in I$ definiert und integrierbar, dann setzt man fest:

$$\int_{x_0}^{b} f(x)\,dx := \lim_{h\to 0+0} \int_{x_0+h}^{b} f(x)\,dx; \quad \int_{a}^{x_0} f(x)\,dx := \lim_{h\to 0+0} \int_{a}^{x_0-h} f(x)\,dx$$

TYP 2: Mindestens eine Integrationsgrenze ist betragsmäßig unendlich

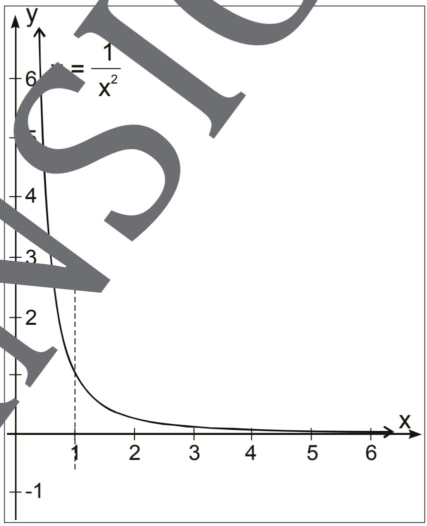
z.B.: $\int_2^\infty \frac{1}{x^2}\,dx$ oder: $\int_2^\infty \frac{1}{x}\,dx$

$$\int_2^\infty \frac{1}{x^2}\,dx := \lim_{u\to\infty}\int_2^u \frac{1}{x^2}\,dx = \lim_{u\to\infty}\left[-\frac{1}{x}\right]_2^u$$

$$= \lim_{u\to\infty}\left(-\frac{1}{u}+\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}$$

$$\int_2^\infty \frac{1}{x}\,dx = \lim_{u\to\infty}\int_2^u \frac{1}{x}\,dx = \lim_{u\to\infty}\left[\ln x\right]_2^u$$

$$= \lim_{u\to\infty}\left(\ln u - \ln 2\right) = \infty$$



Definition

Ist f für $x \ge a$ integrierbar, so bedeutet unter der Voraussetzung der Existenz des Grenzwerts:

$$\int_a^\infty f(x)\,dx := \lim_{b\to\infty}\int_a^b f(x)\,dx; \quad \int_{-\infty}^{b} f(x)\,dx := \lim_{a\to-\infty}\int_a^b f(x)\,dx;$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx := \lim_{a\to-\infty}\int_a^0 f(x)\,dx + \lim_{b\to\infty}\int_0^b f(x)\,dx$$

TYP 3: TYP 1 + TYP 2

Aufgaben

1. Formen Sie laut Definition um und versuchen Sie dann zu berechnen. In welchen Fällen existiert der Integralwert nicht? (Man sagt in diesem Fall, dass das Integral divergiert).

   a) $\int\limits_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx$

   b) $\int\limits_0^\infty e^{-x}\,dx$

   c) $\int\limits_0^1 \frac{1}{x^2}\,dx$

   d) $\int\limits_1^\infty \frac{2}{x^2}\,dx$

   e) $\int\limits_1^\infty \frac{1}{x^4}\,dx$

   f) (CAS) $\int\limits_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$

   g) (CAS) $\int\limits_2^\infty \frac{x}{1-x^2}\,dx$

2. Zeigen Sie: Die Funktion F mit $F(x)=\frac{1}{1-x^2}$ ist eine Stammfunktion zur Funktion f mit $f:\ x \mapsto \frac{2x}{\left(1-x^2\right)^2}$.

   Berechnen Sie dann schrittweise: $\int\limits_2^\infty \frac{x}{\left(1-x^2\right)^2}\,dx$

Kompetenzprofil

- Niveau: grundlegend bis gehoben
- Fachlicher Bezug: Analysis
- Kommunikation: argumentieren, berechnen, Ergebnisse reflektieren
- Problemlösen: Theoriekenntnisse auf konkrete Probleme anwenden
- Modellierung: Zusammenhang zwischen uneigentlichem Integral und geometrischer Vorstellung
- Medien: Taschenrechner, CAS-Rechner
- Methode: Einzelarbeit, Lehrervortrag
- Inhalt in Stichworten: Definition des uneigentlichen Integrals, Zusammenhang mit seiner graphisch-geometrischen Bedeutung, Anwendungen der Theorie auf verschiedene Problemstellungen

Autor: Carlo Vöst

Lösung

1. a) $$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx := \lim_{a\to 0}\int_a^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx = \lim_{a\to 0}\int_a^1 x^{-\frac{1}{2}}\,dx = \lim_{a\to 0}\left[2x^{\frac{1}{2}}\right]_a^1$$
$$= \lim_{a\to 0}\left(2\cdot\sqrt{1} - 2\cdot\sqrt{a}\right) = 2$$

b) $$\int_0^\infty e^{-x}\,dx := \lim_{u\to\infty}\int_0^u e^{-x}\,dx = \lim_{u\to\infty}\left[-e^{-x}\right]_0^u = \lim_{u\to\infty}\left(-e^{-u} - (-1)\right) = 0 + 1 = 1$$

c) $$\int_0^1 \frac{1}{x^2}\,dx := \lim_{b\to 0}\int_b^1 \frac{1}{x^2}\,dx = \lim_{b\to 0}\int_b^1 x^{-2}\,dx = \lim_{b\to 0}\left[-x^{-1}\right]_b^1 = \lim_{b\to 0}\left(-1 + \frac{1}{b}\right)$$

$\Rightarrow$ Das Integral divergiert.

d) $$\int_1^\infty \frac{2}{x^2}\,dx := \lim_{b\to\infty}\int_1^b \frac{2}{x^2}\,dx = \lim_{b\to\infty}\int_1^b \left(2x^{-2}\right) = \lim_{b\to\infty}\left[-2x^{-1}\right]_1^b = \lim_{b\to\infty}\left(-\frac{2}{b} + 2\right) = 2$$