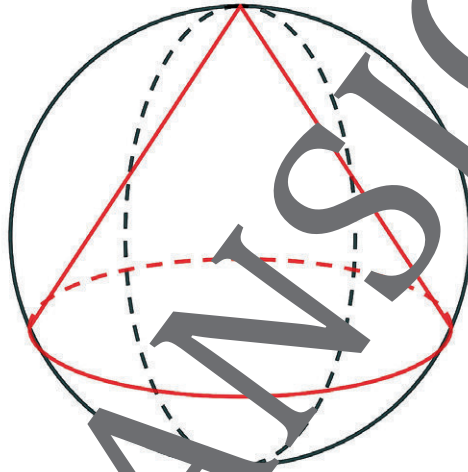


# Eine runde Sache – Extremwertaufgaben mit Kugel und Kegel

Ein Beitrag von Wolfgang Lübbe



*Grafik: Wolfgang Lübbe*

Dieser Beitrag beinhaltet Aufgaben zur Extremalproblematik. Dabei geht es darum, Minima bzw. Maxima für innermathematische Probleme zu berechnen. Konkret untersuchen die Schülerinnen und Schüler Kegel und Kugeln und wie die Oberflächen und Volumina zusammenhängen, wenn einer dieser Körper ganz im Inneren des anderen liegt.

Für vorgegebene Probleme ermitteln sie diejenige Lösung, die unter Berücksichtigung einer oder mehrerer Nebenbedingungen die optimale Variante darstellt. Solche Aufgabenstellungen können für Schülerinnen und Schüler durchaus interessant sein. Das ist insbesondere dann der Fall, wenn sie im Ergebnis spannende Zusammenhänge und Verhältnisse unterschiedlicher mathematischer Größen finden. Insbesondere erkennen sie, dass eine Funktion mit einer einzelnen unabhängigen Variablen eine notwendige Voraussetzung zur Lösung dieser Aufgaben ist. Um dies zu erreichen, ist die Ermittlung von passenden Nebenbedingungen ein wichtiger Teil der Aufgaben.

# Eine runde Sache – Extremwertaufgaben mit Kugel und Kegel

Oberstufe (grundlegend / weiterführend)

Ein Beitrag von Wolfgang Lübbe

Hinweise	1
M1 Theorie	2
M2 Aufgaben	3
Lösungen	4

## Die Schülerinnen und Schüler

Nur eine Funktion mit einer einzelnen unabhängigen Variablen ist die notwendige Voraussetzung für die Lösung einer solchen Extremwertaufgabe.

Da sich aus der Aufgabenstellung meist Funktionsgleichungen mit zwei oder mehreren unabhängigen Variablen ergeben, sind die Nebenbedingungen erforderlich, mit deren Hilfe dieses Ziel – Funktionsgleichungen mit genau einer unabhängigen Variablen – erreicht werden kann. Das Ermitteln dieser Nebenbedingungen ist das eigentliche Problem. Dabei helfen in der Regel Skizzen, die den Sachverhalt der Aufgabenstellung prinzipiell darstellen und so das Finden einer Lösungsidee erleichtern.

Den Schülerinnen und Schülern wird auch bewusst, wie wichtig der Nachweis der rechnerisch ermittelten lokalen Extrema ist, um für das zu lösende Problem falsche bzw. nicht sinnvolle Ergebnisse auszuschließen.

## Überblick:

Legende der Abkürzungen:

AB Arbeitsblatt



einfaches Niveau



mittleres Niveau



schwieriges Niveau

Thema	Material	Methode
Theorie	M1	AB
Aufgaben	M2	AB

## Kompetenzprofil:

**Inhalt:** Kugel, Kugelsektor, Kugelkappe, Kugelschicht, gerader Kreiskegel, Kegelmantel, Volumina, Oberfläche, Satz des Pythagoras, Ableitungen, Extrema, Querschnitt-Verhältnis, quadratische Gleichung – Lösungsformel

**Medien:** wissenschaftlicher Taschenrechner, Formelsammlung

**Kompetenzen:** Mathematisch argumentieren und beweisen (K1), Probleme mathematisch lösen und mathematisch modellieren (K3), mathematische Darstellungen verwenden (K4), mit symbolischen, formalen und technischen Elementen der Mathematik umgehen (K5), mathematisch kommunizieren (K6)

## Hinweise

### Einsatz im Unterricht

Um wertvolle Unterrichtszeit zu sparen, empfiehlt es sich, die Aufgabenstellung als Kopie für alle Schülerinnen und Schüler bereitzustellen.

Die Aufgaben mit einfachem und mittlerem Niveau sind in erster Linie für die Einzelarbeit, die Aufgaben auf schwierigem Niveau für die Partnerarbeit geeignet. Bei allen Aufgaben, aber besonders bei solchen mit höherem Schwierigkeitsgrad, empfiehlt es sich, den Sachverhalt zu Beginn der Erarbeitung der Nebenbedingungen in einer Skizze im Tafelbild zu verdeutlichen. So wird der besonderen Herausforderung in diesem Teil des Lösungsweges Rechnung getragen und allen Schülerinnen und Schülern der Einstieg in den weiteren Lösungsweg ermöglicht.

Auch Teamarbeit leistungsschwächerer und leistungsstärkerer Schülerinnen und Schüler ist ratsam.

Nach der Formulierung der Zielfunktion mit nur **einer** unabhängigen Variablen können alle Lernenden in der Regel selbstständig weiterarbeiten.

Die Zusammenhänge und Verhältnisse verschiedener mathematischer Größen können Teil einer Hausaufgabe sein und im folgenden Unterricht im Gespräch allen Schülerinnen und Schülern zugänglich gemacht werden.

Wenn ein Teil der Routinearbeit (zum Beispiel das Bilden der Ableitungsfunktionen; Umformungen von Gleichungen) in die Hausarbeit verlagert wird, beträgt die zur Lösung der fünf Aufgaben benötigte Zeit etwa 6 Unterrichtsstunden.

## M1 Theorie

- HB:** Die Hauptbedingung – die zu optimierende Zielgröße – die sich aus der Aufgabenstellung ergibt, wird als Funktion mit in der Regel **mehreren** Variablen dargestellt.
- NB:** Die Variablen sind meist nicht unabhängig voneinander. Zwischen ihnen bestehen Verbindungen, die in Form von Gleichungen (Nebenbedingungen) erfasst werden können.
- ZF:** Die Gleichungen der Nebenbedingungen werden jeweils nach einer Variablen umgestellt und in die Hauptbedingung eingesetzt. Dadurch entsteht eine Funktion – die Zielfunktion – mit nur noch einer Variable. In dieser Zielfunktion tritt als abhängige Variable diejenige Größe auf, die einen Extremwert annehmen soll. Diese Funktion wird mit Hilfe der Differentialrechnung auf lokale Extrema untersucht.

**Satz des Pythagoras:**

$$c^2 = a^2 + b^2$$

**Quadratische Gleichung:**

$$y = x^2 + px + q$$

**Lösungsformel:**

$$x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$$

**Kugel:**

Volumen  $V_{Ku} = \frac{4}{3}\pi r^3$

Oberfläche  $A_{OKu} = \pi d^2$

Kugelkappe  $A_{KK} = 2\pi rh$

Kugelschicht  $V_{KS} = \frac{1}{6}\pi h(3R_1^2 + 3R_2^2 + h^2)$

**Kegel:**

Volumen  $V_{Ke} = \frac{1}{3}\pi r^2 h$

Oberfläche  $A_{OKe} = \pi r(r + s)$

Kegelmantel  $A_{KM} = \pi rs$

# Sie wollen mehr für Ihr Fach?

## Bekommen Sie: Ganz einfach zum Download im RAABE Webshop.



**Über 5.000 Unterrichtseinheiten**  
sofort zum Download verfügbar



**Webinare und Videos**  
für Ihre fachliche und  
persönliche Weiterbildung



**Attraktive Vergünstigungen**  
für Referendar:innen mit  
bis zu 15% Rabatt



**Käuferschutz**  
mit Trusted Shops



Jetzt entdecken:  
**www.raabe.de**