D.1.34

Exponentialfunktionen

Die e-Funktion – Theorie, Anwendungen und Experimente

Guido Müller

links: G. de l'Hôpital, Kupferstich von Gérard Edelinck, gemeinfrei
rechts: L. Euler, Portrait von Jakob Emanuel Handmann, gemeinfrei

Die e-Funktion als ausgezeichnete Exponentialfunktion gehört zu den wichtigsten Funktionen der Mathematik. Auch in der Physik, Biologie und Finanzmathematik wird sie angewendet. Die Unterrichtseinheit vermittelt grundlegende Fähigkeiten im Umgang mit dieser Funktion. Die Schülerinnen und Schüler üben Differenziationsregeln wie die Ketten- und Produktregel ein. Darüber hinaus lernen sie die Regel von de L'Hospital kennen. Eine Tabellenkalkulation hilft beim Auffinden der Lösung.

© RAABE 2025

VORANSICHT

KOMPETENZPROFIL

Klassenstufe:	10/11
Dauer:	8 Unterrichtsstunden
Kompetenzen:	Mathematisch argumentieren, Probleme mathematisch lösen, mathematisch modellieren, mathematische Darstellungen verwenden, mit mathematischen Objekten umgehen, kommunizieren, mit Medien mathematisch arbeiten
Methoden:	Bildanalyse, Computer- und Softwareeinsatz, Datenauswertung, Diskussion, Schülerexperiment
Materialart:	Arbeitsblatt, Bildimpuls, Definition, Excel, Experiment, Lernerfolgskontrolle, Textimpuls
Thematische Bereiche:	Theorie und Anwendung von Exponentialfunktionen und der e-Funktion, Definition[illegible], Regel von de L'Hospital, Asymptoten, Zerfallsgesetz, Halbwertszeit, praktische Experimente

Fachliche Hinweise

Bezüge zur Physik – fachübergreifend unterrichten

Die Experimente eignen sich für einen fachübergreifenden Unterricht (Physik). Lassen Sie Ihre Schülerinnen und Schüler ein Experiment auswählen und eigenständig durchführen. Für die Experimente zur Radioaktivität und zur Entladung eines Kondensators benötigen Sie Hilfsmittel aus der Physik. Sämtliche Experimente können jedoch auch anhand der vorliegenden Excel-Tabellen ausgewertet werden, ohne sie praktisch durchgeführt zu haben.

Voraussetzungen der Lerngruppe

Die Schülerinnen und Schüler müssen die Ketten- und Produktregel kennen. Wenn diese Regeln nicht bekannt sind, erarbeiten Sie sie vorab oder parallel zur Reihe anhand des Schulbuches. Kenntnisse der Integralrechnung sind nicht notwendig. Die Schülerinnen und Schüler sollten mit einer Tabellenkalkulation souverän umgehen können. Sie brauchen sie nämlich, um Grenzbetrachtungen durchzuführen.

VORANSICHT

© RAABE 2025

Didaktisch-methodische Hinweise

Führen Sie die Unterrichtseinheit direkt im Anschluss an das Thema *Ganzrationale Funktionen* durch. Aufgrund der herausragenden Rolle der e-Funktion in der Mathematik und den Naturwissenschaften ist es nämlich sinnvoll, das Themengebiet *Exponentialfunktionen* möglichst frühzeitig im Unterricht zu behandeln. Dies führt zu einem sicheren Umgang mit der e-Funktion.

Die Schülerinnen und Schüler erhalten mit dem vorliegenden Material die Möglichkeit, sich eigenständig in dieses komplexe Themengebiet einzuarbeiten. Die Materialien können in der Regel unabhängig voneinander bearbeitet werden. Schülergerechte Lösungen erlauben es den Lernenden, ihre Rechenschritte und Ergebnisse zu kontrollieren.

Legen Sie die Arbeitsblätter an einer **Lerntheke** aus. Sie als Lehrkraft nehmen eine passiv begleitende Rolle ein. Sie stehen nur bei Fragen zur Verfügung. Alternativ können Sie die Materialien aber auch in Partnerarbeit bearbeiten lassen.

Lassen Sie Ihre Schülerinnen und Schüler eine Tabellenkalkulation (Excel, Open Office) benutzen. Der Einsatz hilft bei der Grenzwertbildung und bietet eine Kontrollmöglichkeit – unabhängig von der zuvor mit Papier und Bleistift erarbeiteten Lösung.

© RAABE 2025

Einstieg und Einordnung in den Gesamtkontext

Als Einstieg eignet sich das Material **M 1**, das die Kenntnisse aus der SI über Exponentialfunktionen und Logarithmen ins Gedächtnis zurückruft. Bei Zeitmangel steigen Sie alternativ über ein Experiment aus den Projektthemen **M 8** ein. Führen Sie das Experiment im Unterricht durch und analysieren Sie es gemeinsam mit Ihren Schülerinnen und Schülern.

Leiten Sie mit den Lernenden die Ableitung einer beliebigen Exponentialfunktion $f: x \to a^x$ her. a bezeichnet hierbei eine beliebige Basis. Für die Ableitung $f'(x_0)$ an einer beliebigen Stelle x0 ergibt sich aus der Definition des Differenzialquotienten:

$$f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{a^{x_0+h}-a^{x_0}}{h} = a^{x_0} \cdot \lim_{h \to 0} \frac{a^h-1}{h}$$

Mit einer Tabellenkalkulation lässt sich zeigen, dass sowohl der links- als auch der rechtsseitige Limes existiert und beide übereinstimmen. Ferner können die Schülerinnen und Schüler mit einer Tabellenkalkulation herausfinden, dass für die Euler'sche Zahl $e \approx 2{,}71828$ als Basis die Ableitungsfunktion mit der Ausgangsfunktion übereinstimmt.

VORANSICHT

Die e-Funktion – eine spezielle Exponentialfunktion **M 1**

Die e-Funktion $f(x)=e^x$ ist eine spezielle Exponentialfunktion.
Deshalb gelten für sie natürlich die Rechengesetze für Exponentialfunktionen.

Merke: Wichtige Regeln

– $e^{a+b}=e^a\cdot e^b$ $\quad e^{a-b}=\frac{e^a}{e^b}$ $\quad \left(e^a\right)^b=e^{a\cdot b}$

– Wir bezeichnen mit $\ln$ den **natürlichen Logarithmus** zur Basis e.

$\ln(x)=\log_e(x)$. Dann gilt: $e^x=b \;\Leftrightarrow\; x=\log_e(b)=\ln(b)$.

– ln ist die Umkehrfunktion der e-Funktion: $e^{\ln(x)}=x$ und $\ln(e^x)=x$

– $\ln(a\cdot b)=\ln(a)+\ln(b)$ $\quad \ln\left(\frac{a}{b}\right)=\ln(a)-\ln(b)$ $\quad \ln(a^r)=r\cdot\ln(a)$

Aufgaben

1. Gegeben seien folgende Funktionen

$f(x)=2e^{-x}$ $\quad g(x)=e^{3x}$ $\quad h(x)=-e^{x+1}$

a) Zeichnen Sie den Graphen der Funktionen.
Fertigen Sie hierzu eine Wertetabelle an.

	−2,5	−2	−1,5	−1	−0,5	0
f(x)						
g(x)						
h(x)						
	0,5	**1**	**1,5**	**2**	**2,5**	
f(x)						
g(x)						
h(x)						

b) Berechnen Sie die Funktionswerte an den Stellen $x=-1,\ x=0,\ x=2$

c) Auf welchem Graphen liegt der Punkt P(−2 | 14,78)?

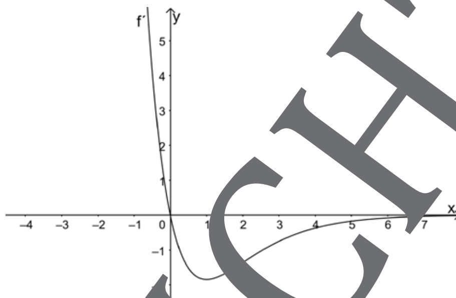
d) Für welchen x-Wert wird der y-Wert 10 angenommen?

© RAABE 2025

VORANSICHT

Wachstum und Zerfall – Anwendungen der e-Funktion **M 2**

1. **Informationen aus dem Verlauf der Ableitung**
   Gegeben ist der Graph der Ableitung einer Funktion (siehe nebenstehendes Schaubild).
   Beschreiben Sie die Graphen der Ausgangsfunktion und der 2. Ableitung. Begründen Sie Ihre Ergebnisse.

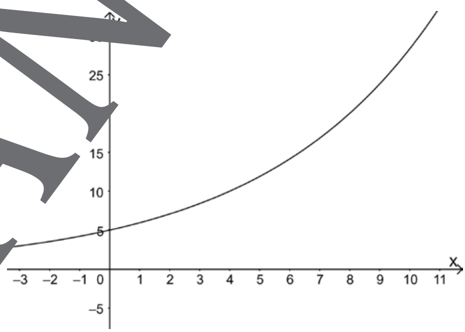


2. **Halbwertszeit**
   Info: Als Halbwertszeit T_H bezeichnet man die Zeitspanne, in der sich jeweils der Funktionswert (z. B. die Anzahl der vorhandenen Kerne) halbiert.

   Eine 8 cm hohe Bierschaumkrone zerfällt exponentiell. [illegible] Minuten ist die Krone nur noch 3 cm hoch. Wie groß ist die Halbwertszeit?
   Tipp: Das zugehörige Zerfallsgesetz lautet: $f(x) = b \cdot a^x$

3. **Verdoppelungszeit**
   Info: Als Verdoppelungszeit T_D bezeichnet man die Zeitspanne, in der sich jeweils der Funktionswert verdoppelt.
   Bestimmen Sie aus dem Diagramm die Verdoppelungszeit (x-Achse in Jahren).

   Welche Bedeutung hat die Halbwertszeit bzw. die Verdoppelungszeit grafisch?



Grafiken: Guido Müller

© RAABE 2025

VORANSICHT

Auf dem Weg zum Experten – Differenziationsregeln M 3

Wenn Sie dieses Arbeitsblatt durchgearbeitet haben, sind Sie ein Ableitungsexperte!
Nehmen Sie sich daher genügend Zeit, um in Ruhe überlegen zu können.

Merke: Wichtige Regeln

$f(x)=e^x \;\Rightarrow\; f'(x)=e^x$

Für $\ln(x)=\log_e(x)$, den natürlichen Logarithmus zur Basis e, gilt:

$g(x)=\ln(x) \;\Rightarrow\; g'(x)=\frac{1}{x}$

Beispiel

Sei $f(x)=x\cdot e^{m\cdot x}$, m = konst., $m\in\mathbb{R}$.
Wir leiten diese Funktion zweimal ab. Dabei verwenden wir die Produkt- und die Kettenregel.

$f'(x)=1\cdot e^{m\cdot x}+x\cdot m\cdot e^{m\cdot x}=(1+m\cdot x)\cdot e^{m\cdot x}$

$f''(x)=m\cdot e^{m\cdot x}+(1+m\cdot x)\cdot m\cdot e^{m\cdot x}=(2m+m^2x)$ [illegible]

Versuchen Sie bei jeder Ableitung, die Exponentialfunktion wieder auszuklammern. Durch diesen Trick werden die Ableitungen übersichtlicher und man kann sie leichter berechnen.

Vermeiden Sie Quotienten: $\frac{e^{-11x}}{x^9}=e^{-11x}\cdot x^{-9}$.

Aufgaben

1. Leiten Sie die folgenden Funktionen zweimal ab.

a) $f(x)=e^{-\frac{3}{2}x-4}$

b) $f(x)=(5x-2)\cdot e^{5x}$

c) $f(x)=(3x+7)\cdot$ [illegible] $\cdot e^{-4x}$

d) $f(x)=\frac{x^2}{e^{7x}}$

e) $f(x)=\frac{e^{2x}\cdot e^{[illegible]}\cdot e^{3(x-2)}}{e^{5x}\cdot e^{(x^2-3)}}$

f) $f(x)=3x\cdot e^{-x^2+5x-7}$

g) Für Experten:

$f(x)=ae^{bx^2+c}$, a, b, c konstant

VORANSICHT

© RAABE 2025

RAAbits Online
@RAABE

Mehr Materialien für Ihren Unterricht mit RAAbits Online

Unterricht abwechslungsreicher, aktueller sowie nach Lehrplan gestalten – und dabei Zeit sparen.
Fertig ausgearbeitet für über 20 verschiedene Fächer, von der Grundschule bis zum Abitur: Mit RAAbits Online stehen redaktionell geprüfte, hochwertige Materialien zur Verfügung, die sofort einsetz- und editierbar sind.

- Zugriff auf bis zu **400 Unterrichtseinheiten** pro Fach
- Didaktisch-methodisch und **fachlich geprüfte Unterrichtseinheiten**
- Materialien als **PDF oder Word** herunterladen und individuell anpassen
- Interaktive und multimediale Lerneinheiten
- Fortlaufend **neues Material** zu aktuellen Themen

Testen Sie RAAbits Online 14 Tage lang kostenlos!
www.raabits.de

RAAbits Online – Das Portal für Unterrichtsmaterialien und Schulorganisation