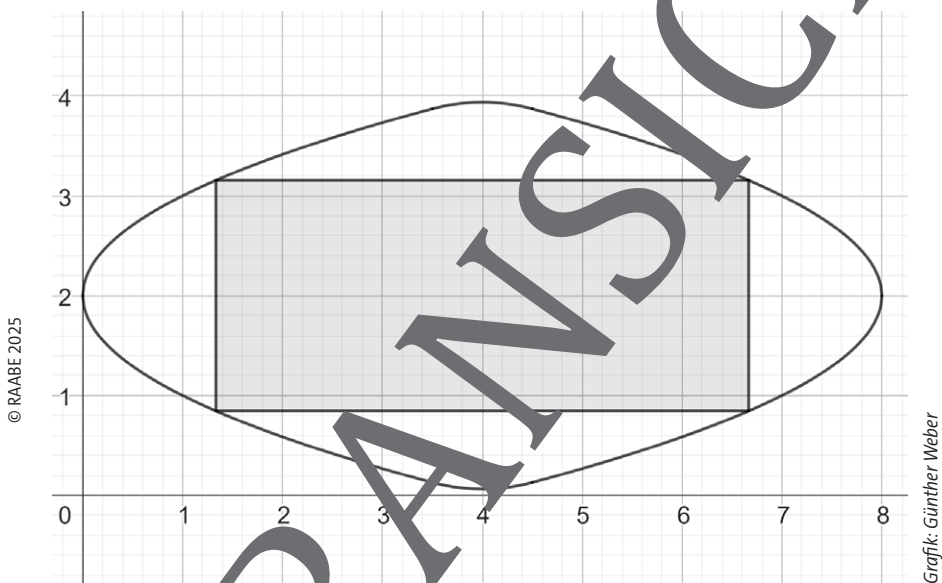


R.3.6

Anwendungsaufgaben – Wurzelfunktionen

Zuschnitt einer Dekorplatte mithilfe des Graphen einer Wurzelfunktion

Günther Weber



Eine rechteckige Dekorplatte soll abgerundet werden. Hierbei erfolgt der Zuschnitt entlang eines Graphen einer Wurzelfunktionschar, die drei besondere Eigenschaften aufweist. Die Parameter der Schar werden so bestimmt, dass gewisse Eigenschaften erfüllt sind. Die längeren Seiten der Dekorplatte werden zusätzlich noch durch einen Kreisbogen abgerundet; der Kreisbogen und der Graph der Schar sollen hierbei knickfrei ineinander übergehen. Die zugeschnittene und abgerundete Platte soll noch mit einer dekorgleichen Kante versehen werden, deren Länge zu bestimmen ist. Ebenso soll die Platte noch mit einer möglichst großen Acrylplatte abgedeckt werden. Mit den Werkzeugen der Analysis untersuchen Ihre Schülerinnen und Schüler die bestehenden Sachlagen und benutzen sie, damit die gestellten Forderungen erfüllt werden.

KOMPETENZPROFIL

Klassenstufe:	11/12/13
Dauer:	3–4 Unterrichtsstunden
Kompetenzen:	Mathematisch argumentieren und beweisen, mathematische Darstellungen verwenden, mit symbolischen, formalen und technischen Elementen der Mathematik umgehen, Textkompetenz, Umgang mit Texten und Medien
Methoden:	Computer- und Softwareeinsatz, digitale Übung, Übung
Materialart:	GeoGebra-Datei, Grafik
Inhalt:	Wurzelfunktionenschar, Null- und Schnittstellen, Prozentrechnung, Berührungspunkt, Transformation von Graphen, Kreisgleichung, Mittelwertsatz, Schnittwinkel von Graphen, Asymptote, Extremwertproblem, bestimmtes Integral, Bogenlänge des Graphen einer Funktion,

Didaktisch-methodische Hinweise

Lernvoraussetzungen

Ihre Schülerinnen und Schüler können den Parameter bei einer Funktionenschar bestimmen, sodass bestimmte Bedingungen gegeben sind. Die Lernenden wissen, dass die Berechnung des Schnittwinkels von Graphen auf die Berechnung des Schnittwinkels von Tangenten an den Graphen zurückgeführt werden kann. Der Begriff des „knickfreien“ Übergangs zweier Graphen ist bekannt. Ebenso wissen sie, dass die Steigung einer Geraden mithilfe der 1. Ableitungsfunktion bestimmt werden kann und sie wissen, dass das Produkt der Steigungen zweier Geraden, die senkrecht aufeinander stehen, gleich -1 ist. Sie können den Abstand zweier Punkte berechnen. Die Jugendlichen können die Zielfunktion bei einem Extremwertproblem aufstellen. Im Allgemeinen sind die Jugendlichen sicher im Umgang mit Wurzelfunktionen und dazu fähig, diese sowohl zu integrieren als auch zu differenzieren. Von Vorteil ist es, wenn die Lernenden sicher im Umgang mit einem GTR/CAS-Rechner bzw. GeoGebra sind.

Lehrplanbezug

Im Kernlehrplan

https://www.schulentwicklung.nrw.de/lehrplaene/lehrplan/331/gost_klp_m_2023_06_27.pdf

(aufgerufen am 18. 08. 2025) finden sich unter anderem folgende Kompetenzerwartungen:

Die Schülerinnen und Schüler ...

- wenden Transformationen bezüglich beider Achsen auf Funktionen an und deuten die zugehörigen Parameter,
- deuten die Ableitung an einer Stelle als lokale Änderungsrate sowie als Steigung der Tangente an den Graphen,
- bestimmen Parameter einer Funktion mithilfe von Bedingungen, die sich aus dem Kontext ergeben,
- nutzen die Ableitungsregel für Potenzfunktionen mit rationalen Exponenten,
- verwenden notwendige und hinreichende Kriterien zur Bestimmung von Extrem- und Wendepunkten,
- interpretieren Parameter von Funktionen im Kontext und untersuchen ihren Einfluss auf Eigenschaften von Funktionsscharen,
- bestimmen Stammfunktionen ganzrationaler Funktionen,
- ermitteln Flächeninhalte mithilfe von bestimmten Integralen,
- lösen innermathematische und anwendungsbezogene Problemstellungen mithilfe von Potenzfunktionen mit rationalen Funktionen.

Außerdem können die Lernenden digitale Werkzeuge nutzen, um die Aufgaben zu veranschaulichen oder ihre Ergebnisse zu kontrollieren.

Methodisch-didaktische Anmerkungen

Lassen Sie Ihre Schülerinnen und Schüler vor der rechnerischen Bestimmung des Wertebereichs bei **Aufgabe 1a)** in GeoGebra mit einem Schieberegler experimentieren, sodass sie erkennen, dass der Parameter von den Schnittpunkten des Graphen mit den Koordinatenachsen abhängig ist. Bei den **Aufgaben 1b) und d)** können die Jugendlichen den Parameter experimentell mit GeoGebra bestimmen. Fordern Sie bei **Aufgabe 1di)** ein, dass **Aufgabe 1c)** bearbeitet wird und erinnern Sie ihre Klasse daran, dass mit der Tangentensteigung der Neigungswinkel der Geraden gegen die x-Achse bestimmt wird.

Bei **Aufgabe 2a)** besprechen Sie, welche Transformationen für die anderen Schnittlinien notwendig sind. Vor der rechnerischen Bestimmung des Funktionsterms wiederholen Sie noch einmal, wie sich die Transformation auf den Funktionsterm auswirkt. Veranschaulichen Sie

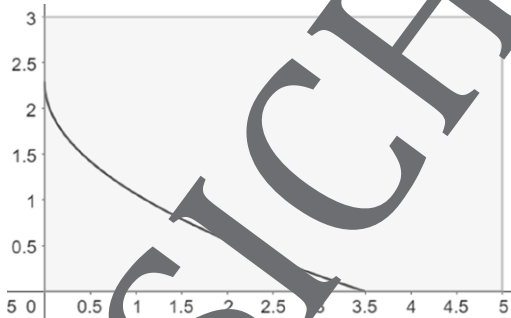
M 1 Aufgaben

1. Eine rechteckige Dekorplatte (Spanplatte mit einer dekorativen Kunststoffsicht) mit den Maßen 30 cm x 50 cm liegt so in einem Koordinatensystem, dass die linke obere Ecke im Koordinatenursprung eines geeigneten Koordinatensystems liegt (1 LE $\approx$ 10 cm).

Zur Abrundung der linken unteren Ecke wird ein Schnitt, der entlang eines Graphen der Funktionenschar

$$f_a(x) = \frac{8}{a} \cdot \left(1 - \sqrt{\frac{x}{a}} \right), a \in D_a$$

durchgeführt. Die Dekorplatte und ein Schnitt entlang des Graphen einer Funktion der Schar ist in der nebenstehenden Abbildung zu sehen.



Grafik: Günther, 2014

Anmerkung: Beim Zuschneiden wird der Verlust von Material – die Holzspäne – nicht berücksichtigt.

- Bestimmen Sie alle möglichen Parameter a , sodass ein Schnitt entlang des Graphen der zugehörigen Funktion zur Abrundung genommen werden kann. Das bedeutet, dass Anfangs- und Endpunkt des Schnitts (bzw. des Graphen) innerhalb der linken bzw. unteren Kante der Platte liegen müssen (vgl. Abbildung).
- Bestimmen Sie den Parameter a in dem Term, dessen Graph zur oben abgebildeten Schnittkante gehört.
- Schreinermeister Kramps legt seinem Auszubildenden folgende Besonderheiten beim Zuschneiden durch einen Graphen der Funktionenschar mit.
 - Egal welchen Graphen der Funktionenschar man als Schnittlinie für die Abrundung nimmt, der Flächeninhalt der abgeschnittenen Fläche ist immer gleich.
 - Beginnt man beim Zuschneiden an der längeren Seite, so endet die Schnittkante bei jeder Schnittlinie entlang des Graphen einer Funktion der Schar knickfrei an der kürzeren Seite.
 - Fertigt man aus den ausgeschnittenen Stücken rechteckige Dekorstücke mit möglichst großem Flächeninhalt, so besitzen alle Dekorstücke den gleichen Flächeninhalt, egal welchen Graphen der Funktionenschar man für den Zuschchnitt verwendet.

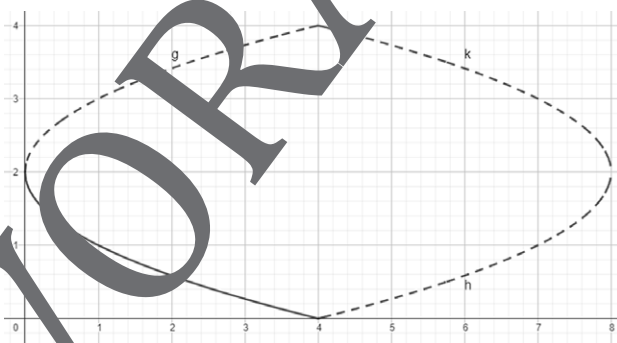
Zeigen Sie, dass diese drei Aussagen wahr sind.

d)

- I. Der Zuschnitt erfolgt jetzt entlang des Graphen einer Funktion der Schar f_a , sodass die Schnittlinie auf die längere Seite der Seite unter einem Winkel von $22,5^\circ$ trifft. Bestimmen Sie den Parameter a , für den $f_a(x)$ diese Bedingung erfüllt.
- II. Zeichnen Sie die Schnittlinie sowie das flächengrößte rechteckige Dekorstück, das aus dem Abfall geschnitten wurde, in die folgende Abbildung ein.



2. Eine weitere rechteckige Dekorplatte (Planplatte mit einer dekorativen Kunststoffsicht) mit den Maßen $400 \text{ mm} \times 800 \text{ mm} \times 25 \text{ mm}$ liegt so in einem Koordinatensystem, dass die linke untere Ecke im Koordinatenursprung eines geeigneten Koordinatensystems liegt ($1 \text{ LE} \approx 100 \text{ mm}$). Die Platte soll an allen vier Ecken zu einem Oval abgerundet werden. Die Schnittlinie soll wieder entlang des Graphen einer Funktion der Schar f_a oder des Graphen einer transformierten Funktion verlaufen.



Grafik: Peter Weber

Mehr Materialien für Ihren Unterricht mit RAAbits Online

Unterricht abwechslungsreicher, aktueller sowie nach Lehrplan gestalten – und dabei Zeit sparen.
Fertig ausgearbeitet für über 20 verschiedene Fächer, von der Grundschule bis zum Abitur: Mit RAAbits Online stehen redaktionell geprüfte, hochwertige Materialien zur Verfügung, die sofort einsetz- und editierbar sind.

- ✓ Zugriff auf bis zu **400 Unterrichtseinheiten** pro Fach
- ✓ Didaktisch-methodisch und **fachlich geprüfte Unterrichtseinheiten**
- ✓ Materialien als **PDF oder Word** herunterladen und individuell anpassen
- ✓ Interaktive und multimediale Lerneinheiten
- ✓ Fortlaufend **neues Material** zu aktuellen Themen



Testen Sie RAAbits Online
14 Tage lang kostenlos!

www.raabits.de

