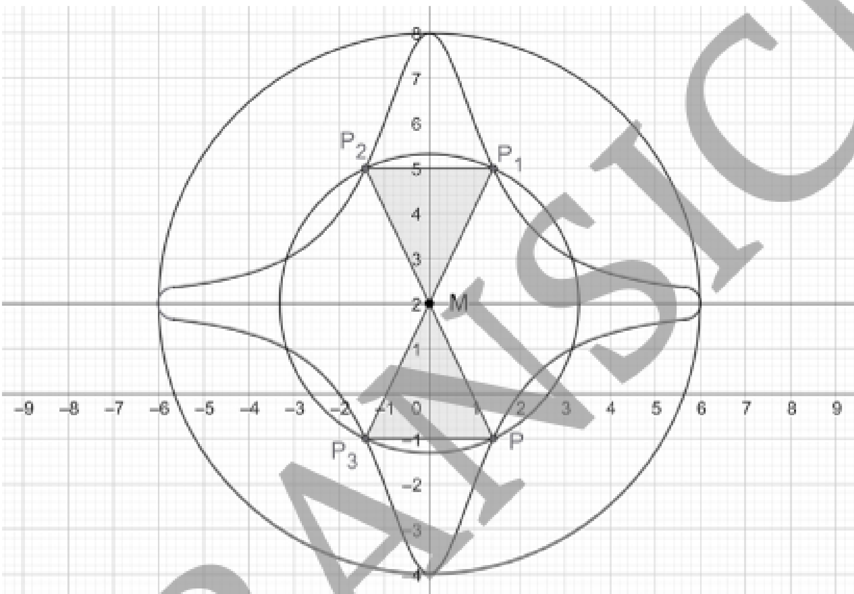
A.2.17

Rationale Funktionen – Gebrochenrationale Funktionen

Geometrische Muster bei einer gebrochenrationalen Funktionenschar

Günther Weber



Die Lernenden zeigen, dass einige bestimmende Eigenschaften der Funktionenschar unabhängig vom Parameter der Schar sind. Zu den Graphen der Schar bzw. zur Wendetangente bestimmen sie Parameter, sodass der Graph, die Wendetangente oder sonstige Flächen bestimmte Anforderungen erfüllen. Spiegelt man einen Graphen der Schar an der Asymptote und legt einen Kreis durch die Extrempunkte von Graph und gespiegeltem Graph, so können die beiden Graphen am Rand durch Halbkreise/Kreissektoren abgerundet werden. Diese durch den Kreis begrenzte Figur wird nun dahingehen untersucht, dass zwischen den Graphen Dreiecke oder Rechtecke eingefügt werden, deren Flächeninhalt maximal werden soll.

KOMPETENZPROFIL

Klassenstufe:	10/11/12/13
Dauer:	7 – 8 Unterrichtsstunden
Kompetenzen:	Mathematisch argumentieren und beweisen, Mathematische Darstellungen verwenden, Mit symbolischen, formalen und technischen Elementen der Mathematik umgehen, Textkompetenz, Umgang mit Texten und Medien
Methoden:	Computer- und Softwareeinsatz, Digitale Übung, Übung
Materialart:	GeoGebra-Datei, Grafik
Inhalt:	Gebrochen-Rationale Funktionenschar, Asymptote, Grenzwertverhalten, Null-, Berühr- und Schnittstellen, Extrem- und Wendepunkte, Tangente, Normale, Wendetangente, Transformation von Graphen, Extremwertproblem, bestimmtes Integral, Kreisgleichung, Wurzelfunktion, Kreissektor, Mittelpunktwinkel

Didaktisch-methodische Hinweise

Lernvoraussetzungen:

Eine Funktionsuntersuchung, auch bei Funktionen mit Parametern, bereitet Ihren Schülerinnen und Schülern keine Schwierigkeiten und sie können die Gleichungen von Tangenten, Normalen und Wendetangenten einer Schar aufstellen. Die Lernenden können die Gleichung einer Asymptote aufstellen und sie können nachweisen, dass der Graph einer Funktion achsensymmetrisch ist. Ihnen ist bekannt, dass die Steigung einer Geraden mithilfe der 1. Ableitungsfunktion bestimmt werden kann und sie wissen, dass das Produkt der Steigungen zweier Geraden, die senkrecht aufeinander stehen, gleich -1 ist.
Ebenso kennen sie die Eigenschaften von Vierecken, insbesondere des Quadrats. Die Jugendlichen können die Zielfunktion bei einem Extremwertproblem aufstellen und Extremwertprobleme auch mit Parametern lösen. Zu Transformation des Graphen von Funktionen können die Lernenden den Funktionsterm der neuen Funktion herleiten. Des Weiteren sind die Schülerinnen und Schüler fähig, bei bekannten Mittelpunkt und Radius die Kreisgleichung aufzustellen und die zu einem Halbkreis gehörige Wurzelfunktion aus der Kreisgleichung herzuleiten. Von Vorteil ist es, wenn der Kurs sicher im Umgang mit einem GTR/CAS-Rechner ist und eine Veranschaulichung der Aufgabenstellungen bzw. Lösungen mithilfe von GeoGebra keine Schwierigkeiten bereitet.

Lehrplanbezug:

Im Kernlernplan
https://lehrplannavigator.nrw.de/system/files/media/document/file/gost_klp_m_2023_06_07.pdf (aufgerufen am 05.11.2025) finden sich unter anderem folgende Kompetenzerwartungen
Die Schülerinnen und Schüler ...

– deuten die Ableitung an einer Stelle als lokale Änderungsrate sowie als Steigung der Tangente an den Graphen,
– bestimmen Sekanten-, Tangenten- sowie Normalensteigungen und berechnen Steigungswinkel,
– verwenden das notwendige Kriterium und hinreichende Kriterien zur Bestimmung von Extrem- bzw. Wendepunkten,
– führen Extremwertprobleme durch Kombination mit Nebenbedingungen auf Funktionen einer Variablen zurück und lösen diese,
– bestimmen Parameter einer Funktion mithilfe von Bedingungen, die sich aus dem Kontext ergeben,
– untersuchen Funktionen auch in Abhängigkeit von Parametern mithilfe von vorgegebenen und mit dem MMS ermittelten Ableitungen im Kontext der Fragestellung,
– nutzen die Eigenschaften von ganzrationalen Funktionen, Exponentialfunktionen, Sinusfunktionen, Kosinusfunktionen, der natürlichen Logarithmusfunktion und von Potenzfunktionen mit rationalem Exponenten sowie der Transformationen dieser Funktionen zur Beantwortung von Fragestellungen,
– interpretieren Parameter von Funktionen im Kontext der Fragestellung und untersuchen ihren Einfluss auf Eigenschaften von Funktionsscharen,
– bilden ohne Hilfsmittel die Ableitungen von ganzrationalen Funktionen, Exponentialfunktionen, Sinus- und Kosinusfunktionen, der natürlichen Logarithmusfunktion sowie von Potenzfunktionen mit rationalem Exponenten und wenden die Produkt- und Kettenregel an,
– untersuchen Funktionen auch in Abhängigkeit von Parametern mithilfe von vorgegebenen und mit dem MMS ermittelten Ableitungen und unbestimmten Integralen („Stammfunktionen") im Kontext der Fragestellung,
– ermitteln Flächeninhalte mithilfe von bestimmten Integralen und uneigentlichen Integralen sowie Volumina von Körpern, die durch die Rotation um die Abszisse entstehen.

Außerdem veranschaulichen die Lernenden geometrische und funktionale Zusammenhänge etwa zum Finden einer Lösungsidee mithilfe digitaler Werkzeuge wie GeoGebra.

Methodisch-didaktische Anmerkungen:

Wiederholen Sie vor der Bearbeitung von **Aufgabe 3a)** wie sich eine Transformation auf den Funktionsterm auswirkt. Bei der **Aufgabe 2a)**, bei der nachgewiesen werden soll, dass die Null- bzw. Wendestelle nicht vom Parameter abhängig ist oder bei den **Aufgaben 2b), 2c) 3b), 3c) 5a), 5b)** und **6b)**, bei denen der Parameter k bestimmt werden soll, kann die Lösung vor der Rechnung zur Veranschaulichung experimentell mithilfe von GeoGebra näherungsweise ermittelt werden bzw. der Lösungsweg veranschaulicht werden. Die **Aufgabe 4b)** und **4c)** können differenziert bearbeitet werden, wobei **4c)** die leistungsstärkeren Schülerinnen und Schülern bearbeiten. Sprechen Sie bei **Aufgabe 4c), Aufgabe 5b)** und bei **Aufgabe 6c)** (Fläche II) vorher den Lösungsweg durch und klären Sie vor der Bearbeitung von **Aufgabe 4d)** den Begriff konzentrische Kreise.

Auf einen Blick

M 1	Aufgaben
Benötigt:	☐ Internet

Erklärung zu den Symbolen

Dieses Symbol markiert differenziertes Material. Wenn nicht anders ausgewiesen, befinden sich die Materialien auf mittlerem Niveau.		
leichtes Niveau	mittleres Niveau	schwieriges Niveau

Aufgaben

M 1

Gegeben ist die Funktionenschar $f_a(x) = \frac{x^2 - 4}{a \cdot (x^2 + 2)}, a > 0$.

1.

a) Zeigen Sie, dass die Graphen der Funktionenschar achsensymmetrisch zur y- Achse verlaufen.

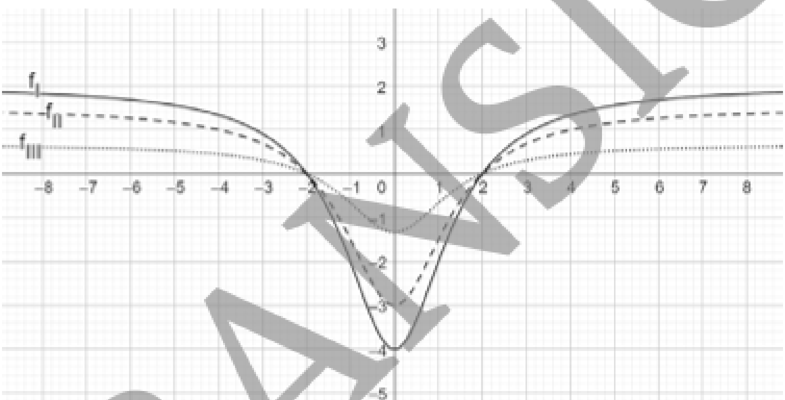
b) Bestimmen Sie die Gleichung der waagerechten Asymptoten w_a.

(Zur Kontrolle: $w_a : y = \frac{1}{a}$)

c) Zeigen Sie, dass alle Graphen die gleichen Schnittpunkte mit der x-Achse haben.

d) Die folgende Abbildung zeigt drei Graphen der Funktionenschar.

Ordnen Sie den Graphen die Parameter $a = \frac{2}{3}$, $a = \frac{3}{2}$ bzw. $a = \frac{1}{2}$ zu und begründen Sie die Zuordnung.



Grafik: Günther Weber

2.

a) Zeigen Sie, dass die Null- und Wendestellen der Graphen der Funktionenschar unabhängig vom Parameter a sind.

b) Die Schnittpunkte der Funktionen der Schar mit der x-Achse und die Wendepunkte bilden ein Viereck. Bestimmen Sie den Parameter a so, dass der Flächeninhalt des Vierecks einen Flächeninhalt von 5 FE hat.

c) Bestimmen Sie den Parameter a so, dass sich die beiden Wendetangenten der Schar rechtwinklig schneiden.