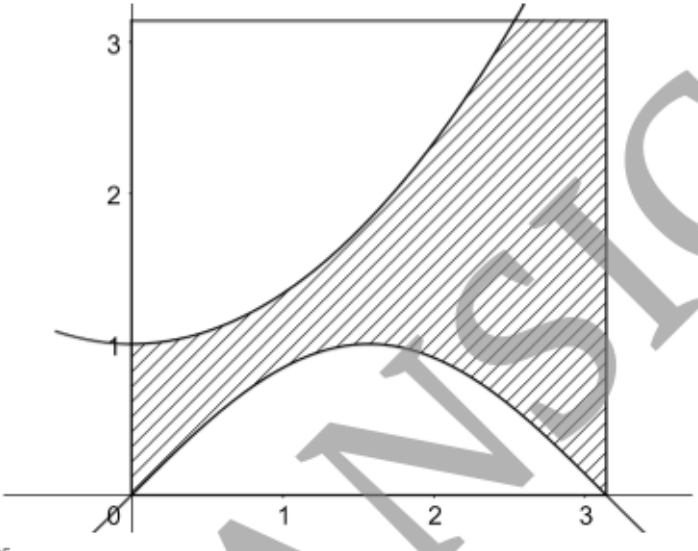
RAAbits

Aufgabensammlung Integralrechnung I

Redaktion Mathematik



© RAABE

Dieser Aufgabensatz ermöglicht Ihren Lernenden eine ausführliche Beschäftigung mit der Integralrechnung auf verschiedenen Niveaustufen. Ihre Klasse bestimmt **Flächeninhalte zwischen Graph und x-Achse** und **zwischen zwei Graphen**. Die Lernenden nutzen dafür den Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung und die Linearität des Integrals. Dabei kommen verschiedene Integrationsregeln und Methoden zum Einsatz, beginnend mit der Potenzregel bis hin zur partiellen Integration und der Substitutionsmethode.

VORANSICHT

KOMPETENZPROFIL

Klassenstufe:	11/12/13
Umfang:	ca. 35 Übungsaufgaben mit Lösungen
Inhalt::	Flächeninhalt zwischen Graph und x-Achse, Flächeninhalt zwischen Graph und Graph, Graph einer Stammfunktion, Funktion aus Änderungsrate rekonstruieren, Linearität des Integrals, Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung, partielles Integrieren, Substitutionsmethode

Didaktisch-methodische Hinweise

Die Lernenden beherrschen Kurvendiskussionen und sind in der Lage, den Funktionsgraphen einer gegebenen Funktion aufzustellen. Sie kennen die Ableitungsregeln der gängigen Funktionen und Begriffe wie Stetigkeit und Monotonie sind ihnen vertraut.

Lernziele

Leitidee: Funktionaler Zusammenhang
Die Jugendlichen lernen den Zusammenhang zwischen Ableitung und Integral kennen. Die Eigenschaften des Integrals nutzen sie für Flächeninhaltsberechnungen.
Die Lernenden können:
- den Wert des bestimmten Integrals als Flächeninhalt erklären.
- den Inhalt des Hauptsatzes der Integralrechnung angeben.
- die Linearität des Integrals rechenökonomisch nutzen.

Leitidee: Zahl – Variable – Operation
Grundlegende Integrationsverfahren werden angewendet.
Die Lernenden können:
- die Potenzregel, die Regel für konstanten Faktor, die Summenregel sowie das Substitutionsverfahren für die Bestimmung einer Stammfunktion verwenden.
- Stammfunktionsterme zu den Funktionstermen $\sin(x)$, $\cos(x)$, e^x und $1/x$ angeben.
- den Hauptsatz der Integralrechnung zur Berechnung bestimmter Integrale nutzen.

Leitidee: Messen
Die Jugendlichen lernen die Integralrechnung als wichtiges Hilfsmittel zur Flächen- und Volumenberechnung kennen.
Die Lernenden können:
- Flächeninhalte zwischen Graphen und x-Achse zwischen zwei Graphen bestimmen.
- das Volumen von Körpern berechnen, die durch Rotation von Flächen um die x-Achse entstehen.

VORANSICHT

 © RAABE 2026 | Es gelten die Lizenzbedingungen

Auf einen Blick

M 1 Werkzeugkasten

Werkzeugkasten	Integrationsregeln und Formeln

M 2 Ganzrationale Funktionen

Aufgabe 1	Polynome und Geraden
Aufgabe 2	Polynome mit unbekannten Koeffizienten
Aufgabe 3	Betragsfunktion, Flächenteilung und Symmetrie
Hinweiskärtchen	Tipps und Hilfestellungen

M 3 Exponentialfunktionen

Aufgabe 1	Flächen zwischen Funktion und Asymptote
Aufgabe 2	Flächen und Grenzübergänge
Aufgabe 3	Exponentialfunktion in Zähler und Nenner
Hinweiskärtchen	Tipps und Hilfestellungen

VORANSICHT

M 4 Trigonometrische Funktionen

Aufgabe 1	Flächen zwischen Sinus und Kosinus	
Aufgabe 2	Kosinus und Wurzel, Sinus mit verschiedenen Argumenten	
Aufgabe 3	Sinus mit Wurzel als Argument	
Hinweiskärtchen	Tipps und Hilfestellungen	

M 5 Wurzelfunktionen

Aufgabe 1	Einfache Wurzelfunktionen und Funktionenscharen	
Aufgabe 2	Wurzel als Faktor und Kombination mit Exponentialfunktion	
Aufgabe 3	Wurzel im Exponenten	
Hinweiskärtchen	Tipps und Hilfestellungen	

M 6 Gebrochenrationale Funktionen

Aufgabe 1	Einfacher Grenzwert und Fläche zwischen Funktion und Tangente	
Aufgabe 2	Funktionenschar und geschicktes Umformen	
Aufgabe 3	Reziproke Funktion und Logarithmus	
Hinweiskärtchen	Tipps und Hilfestellungen	

VORANSICHT

Werkzeugkasten

M 1

Integrationsregeln und Formeln

Hauptsatz der Integralrechnung:

$$\int_a^b f(x)dx = \left[F(x)\right]_a^b = F(b) - F(a)$$

Beschreibt den Flächeninhalt zwischen dem Graph der Funktion f und der x-Achse über dem Intervall [a ; b]. Dabei spricht man auch von einem **bestimmten Integral**.

Flächeninhalt zwischen zwei Funktionsgraphen:
gilt auf einem Intervall [a ; b] für zwei Funktionen f(x) und g(x): $f(x) \geq g(x)$, so beträgt der Flächeninhalt A zwischen den Funktionsgraphen:

$$A = \int_a^b \left(f(x) - g(x)\right)dx$$

Linearität des Integrals:
Für Zahlen a < b < c und d gilt:

$$\int_a^b d \cdot f(x)dx = d \cdot \int_a^b f(x)dx$$

und

$$\int_a^c f(x)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx$$

sowie

$$\int_a^b \left(f(x) + g(x)\right)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$$

Symmetrische Funktion – Symmetrie an der y-Achse:
Ist f(x) = f(–x), so gilt für das Integral:

$$\int_{-a}^{a} f(x)dx = 2 \cdot \int_0^a f(x)dx$$

VORANSICHT

Substitutionsmethode
Ein gegebenes Integral $\int f(x)dx$ wird durch Substitution in ein einfaches bzw. bekanntes Integral umgewandelt:

$$u = g(x) \text{ und } \frac{du}{dx} = g'(x) \Rightarrow dx = \frac{du}{g'(x)}$$

oder

$$x = h(u) \text{ und } h'(u) = \frac{dx}{du} \Rightarrow dx = h'(u)\,du$$

Damit ergibt sich eine Funktion $\varphi(u)$, sodass

$$\int f(x)dx = \int \varphi(u)du = \Phi(u)$$

Rücksubstitution führt dann auf die Stammfunktion F(x) + c.
Beispiel:

$$\int \sin(2x)dx =$$

$$\underline{\text{Substitution}: z = 2x \Rightarrow \frac{dz}{dx} = 2 = 2 \Rightarrow dx = \frac{1}{2}dz}$$

$$= \int \sin z \cdot \frac{1}{2}dz = \frac{1}{2} \cdot \int \sin z dz = -\frac{1}{2}\cos z$$

$$\underline{\text{Rücksubstitution}: z = 2x}$$

$$= -\frac{1}{2}\cos 2x$$

Hinweis: Werden beim bestimmten Integral im Rahmen der Substitution auch die Integralgrenzen angepasst, kann die Rücksubstitution auch entfallen.

VORANSICHT

Ganzrationale Funktionen

M 2

Aufgabe 1

Lösen Sie die Aufgaben:

a) Gegeben ist die in $D = \mathbb{R}$ definierte Funktion $f_a(x) = -\frac{1}{4}x^3 + ax,\ a \in \mathbb{R}^+$ und Graphen G_a.

Für welchen Wert von a schließt der Graph G_a mit der positiven x-Achse eine Fläche A = 9 FE ein?

b) Gegeben ist ein Geradenbüschel y = mx. Bestimmen Sie den Parameter m so, dass das Geradenbüschel aus der Parabel $f(x) = \frac{1}{4}x^2$ eine Fläche mit dem Inhalt A = 9 FE ausschneidet.

c) In einem rechtwinkligen Koordinatensystem sind die Parabel mit der Gleichung

$$p(x) = \frac{1}{4}x^2 - 2x + 4$$

sowie die Parabelpunkte $A(0|y_A)$ und $B(10|y_B)$ gegeben, wobei die Punkte A und B die Gerade g bestimmen.

(i) Berechnen Sie das Flächenstück, das die Parabel und die Gerade g miteinander einschließen.

(ii) Die Gerade AB rotiert um die x-Achse. Berechnen Sie das Volumen des zwischen den Punkten A und B entstehenden Körpers mithilfe eines Integrals. Um was für einen Körper handelt es sich?

d) Die Schar von Funktionen f_a ist gegeben durch ihre Gleichung

$$f_a(x) = \frac{1}{a^3} \cdot x \cdot (x - 7a) \text{ mit } a \in \mathbb{R}^+.$$

(i) Zeigen Sie, dass die Fläche, die von der Kurve und der x-Achse eingeschlossen wird, unabhängig vom Parameter a ist.

(ii) Die beschriebene Fläche rotiert um die x-Achse. Berechnen Sie das Volumen des entstehenden Rotationskörpers. Ist dieses ebenfalls vom Parameter a unabhängig?

VORANSICHT