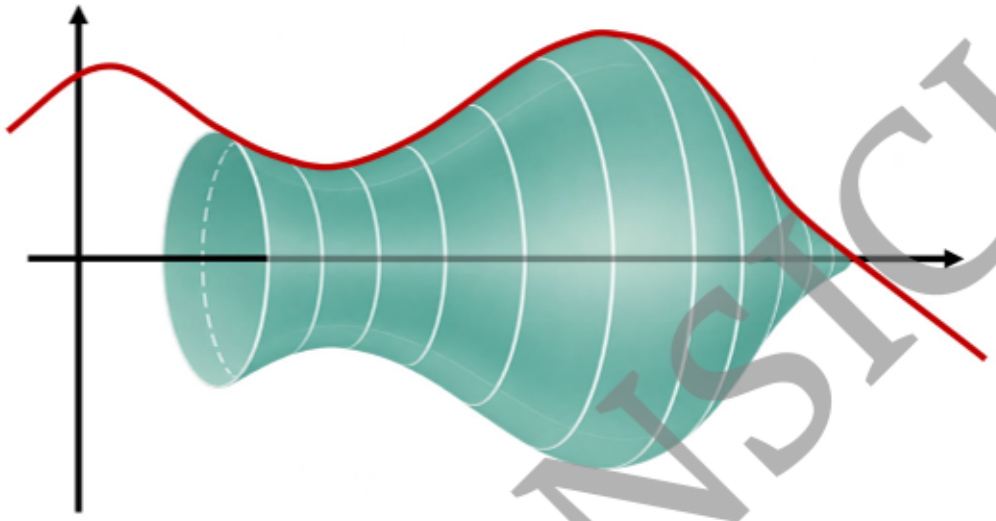
RAAbits

Mathe-Aufgaben zum Üben: Integralrechnung mit ganzrationalen Funktionen

Redaktion Mathematik



© RAABE

VORANSICHT

Dieser Aufgabensatz bietet Lernenden Gelegenheit, die Integralrechnung an ganzrationalen Funktionen auf unterschiedlichen Niveaus zu üben. Sie berechnen Flächen zwischen Graph und *x*-Achse sowie zwischen zwei Graphen, rekonstruieren Funktionen aus vorgegebenen Werten und bestimmen Volumina von Rotationskörpern. Dabei wenden sie die Potenzregel, die Linearität des Integrals und den Hauptsatz der Integralrechnung an. Symmetrieeigenschaften und weitere Informationen zu den Graphen helfen ihnen, die Aufgaben zu lösen.

KOMPETENZPROFIL

Klassenstufe	11/12/13
Dauer	2–4 Unterrichtsstunden, 13 Übungsaufgaben mit Lösungen
Inhalt:	ganzrationale Funktionen, Integralrechnung, bestimmtes Integral, Fläche zwischen Graphen, Rotationskörper

Didaktisch-methodische Hinweise

Das Material umfasst Spickzettel zu den wichtigsten Vorkenntnissen, Definitionen und Rechenbeispielen (**M 1**), Aufgabenblätter mit 13 Übungsaufgaben auf unterschiedlichen Niveaus (**M 2**), Tippkarten (**M 3**) und Lösungen.
M 1 kann zur Wiederholung oder als Nachschlagehilfe dienen. **M 2** lässt sich als Arbeitsblatt austeilen oder für die gemeinsame Bearbeitung projizieren. Die Tippkarten (**M 3**) können vorab ausgeschnitten und am Pult bereitgelegt oder bei Bedarf gezielt ausgegeben werden. So stellen Sie sicher, dass Ihre Lernenden die Hinweise und Tipps nicht von Anfang an verwenden, sondern bedarfsgerecht darauf zugreifen. Die Lösungen eignen sich zur Selbstkontrolle und als Grundlage für die Besprechung im Plenum.

Lernvoraussetzungen
Die Lernenden können ganzrationale Funktionen ableiten und ihre Graphen anhand wichtiger Eigenschaften skizzieren. Sie können Nullstellen, Schnittpunkte, Tangenten, Extrem- und Wendepunkte bestimmen und kennen grundlegende Symmetrieeigenschaften. Erste Kenntnisse zu Stammfunktionen und bestimmten Integralen werden vorausgesetzt. Der Spickzettel in M 1 unterstützt beim Nachschlagen wichtiger Aussagen und Definitionen.

Lernziele
Leitidee: Funktionaler Zusammenhang
Die Lernenden nutzen den Zusammenhang zwischen Ableitung und Stammfunktion sowie den Hauptsatz der Integralrechnung, um bestimmte Integrale zu berechnen. Sie wenden die Linearität des Integrals an.
Leitidee: Zahl – Variable – Operation
Die Lernenden bestimmen Stammfunktionen ganzrationaler Funktionen mithilfe der Potenzregel, der Summenregel und der Regel für konstante Faktoren. Sie rekonstruieren Funktionsterme aus Angaben zu Ableitungen und Punkten.
Leitidee: Messen
Die Lernenden berechnen Flächen zwischen dem Graphen einer Funktion und der x-Achse sowie zwischen zwei Graphen. Sie berücksichtigen dabei die Lage der Graphen und nutzen Symmetrie, wenn sie die Berechnung vereinfacht. Außerdem berechnen sie Volumina von Rotationskörpern, die durch Rotation um die x-Achse entstehen.

VORANSICHT

RAAbits R0452-261231 © RAABE 2026 | Es gelten die Lizenzbedingungen

Auf einen Blick

M 1 Spickzettel

1	Hauptsatz und Integrationsregeln
2	Linearität des Integrals
3	Unbestimmtes Integral und Stammfunktionen
4	Volumen eines Rotationskörpers

M 2 Aufgaben

Aufgabe 1	Flächen und Rotationsvolumina bei Polynomen und Geraden berechnen
Aufgabe 2	Ganzrationale Funktionen aus gegebenen Eigenschaften bestimmen und Flächen sowie Rotationsvolumina berechnen
Aufgabe 3	Flächen bei Betragsfunktionen und symmetrischen Graphen untersuchen und aufteilen

M 3 Tippkarten

Tippkarten	Hinweise und Hilfestellungen zu den einzelnen Aufgaben

Erklärung zu den Symbolen

	Dieses Symbol markiert differenziertes Material. Wenn nicht anders ausgewiesen, befinden sich die Materialien auf mittlerem Niveau.
 einfaches Niveau  mittleres Niveau  schwieriges Niveau	

VORANSICHT

M 1 Spickzettel

Spickzettel: Hauptsatz und Integrationsregeln

Hauptsatz der Integralrechnung

Die Gleichung

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$$

beschreibt das **bestimmte Integral** von f über dem Intervall $[a, b]$. Es entspricht für $f(x) > 0$ dem Flächeninhalt zwischen dem Graphen der Funktion f und der x-Achse über dem Intervall $[a, b]$.

Flächeninhalte unterhalb der x-Achse fließen als negative Werte in das berechnete Integral ein. Möchte man den tatsächlichen Flächeninhalt bestimmen, müssen Flächeninhalte über und unter der x-Achse separat berechnet und dann addiert werden.

Flächeninhalt zwischen zwei Funktionsgraphen

Gilt auf einem Intervall $[a, b]$ für zwei Funktionen $f(x)$ und $g(x)$: $f(x) \geq g(x)$, so beträgt der Flächeninhalt A zwischen den Funktionsgraphen:

$$A = \int_a^b (f(x) - g(x))\,\mathrm{d}x.$$

Symmetrische Funktion – Symmetrie an der y-Achse

Ist $f(x) = f(-x)$, so gilt für das Integral:

$$\int_{-a}^{a} f(x)\,\mathrm{d}x = 2 \cdot \int_0^a f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Potenzregel

$$\int x^n\,\mathrm{d}x = \frac{1}{n+1} x^{n+1} + c, \text{ für } n \neq -1.$$

Dies gilt auch für rationale Exponenten:

$$\begin{aligned}\int \sqrt[m]{x^n}\,\mathrm{d}x &= \int x^{n/m}\,\mathrm{d}x \\ &= \left(\frac{1}{n/m+1}\right) x^{n/m+1} + c \\ &= \frac{m}{n+m} x^{n+m/m} + c \\ &= \frac{m}{n+m} \sqrt[m]{x^{n+m}}\end{aligned}$$

Sonderfall: $n = -1$:

$$\int x^{-1}\,\mathrm{d}x = \int \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = \ln(|x|) + c.$$

VORANSICHT