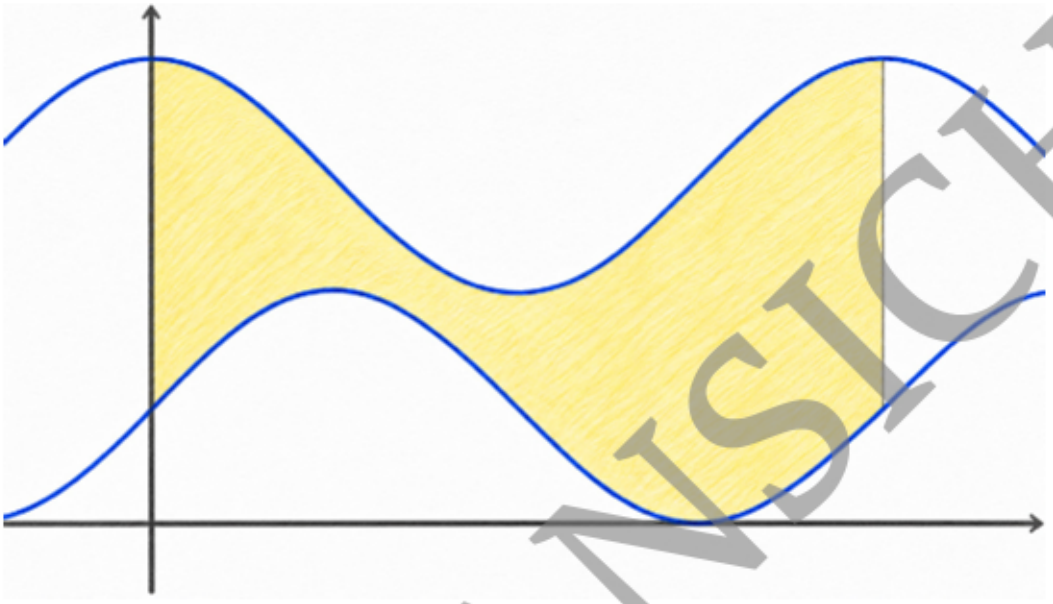
RAAbits

Mathe-Aufgaben zum Üben: Integralrechnung mit trigonometrischen Funktionen

Redaktion Mathematik



© RAABE

VORANSICHT

Der Aufgabensatz ermöglicht Ihren Lernenden, sich auf verschiedenen Niveaustufen intensiv mit der Integralrechnung von trigonometrischen Funktionen auseinanderzusetzen. Sie berechnen Flächeninhalte zwischen Graphen und der *x*-Achse sowie zwischen zwei Graphen. Dabei wenden sie den Hauptsatz der Differenzial- und Integralrechnung und die Linearität des Integrals an. Zum Einsatz kommen verschiedene Integrationsregeln und -methoden – von der Potenzregel bis zur partiellen Integration und Substitution.

KOMPETENZPROFIL

Klassenstufe	11/12/13
Dauer	6–8 Unterrichtsstunden, 14 Übungsaufgaben mit Lösungen
Inhalt:	Flächeninhalt zwischen Graph und x-Achse, Flächeninhalt zwischen Graph und Graph, Graph einer Stammfunktion, Funktion aus Änderungsrate rekonstruieren, Linearität des Integrals, Hauptsatz der Differenzial- und Integralrechnung, partielles Integrieren, Substitutionsmethode

Didaktisch-methodische Hinweise

Das Material umfasst Spickzettel zu den wichtigsten Vorkenntnissen, Definitionen und Rechenbeispielen (**M 1**), Aufgabenblätter mit 14 Übungsaufgaben auf unterschiedlichen Niveaus (**M 2**), Tippkarten (**M 3**) und Lösungen.

M 1 kann zur Wiederholung oder als Nachschlagehilfe dienen. **M 2** lässt sich als Arbeitsblatt austeilen oder für die gemeinsame Bearbeitung projizieren. Die Tippkarten (**M 3**) können vorab ausgeschnitten und am Pult bereitgelegt oder bei Bedarf gezielt ausgegeben werden. So stellen Sie sicher, dass Ihre Lernenden die Hinweise und Tipps nicht von Anfang an verwenden, sondern bedarfsgerecht darauf zugreifen. Die Lösungen eignen sich zur Selbstkontrolle und als Grundlage für die Besprechung im Plenum.

Lernvoraussetzungen

Die Lernenden beherrschen Kurvendiskussionen und sind in der Lage, den Funktionsgraphen einer gegebenen Funktion aufzustellen. Sie kennen die Ableitungsregeln der gängigen Funktionen und Begriffe wie Stetigkeit und Monotonie sind ihnen vertraut.

Lernziele

Leitidee: Funktionaler Zusammenhang

Die Jugendlichen lernen den Zusammenhang zwischen Ableitung und Integral kennen. Die Eigenschaften des Integrals nutzen sie für Flächeninhaltsberechnungen.

Die Lernenden können:

- den Wert des bestimmten Integrals als Flächeninhalt erklären.
- den Inhalt des Hauptsatzes der Integralrechnung angeben.
- die Linearität des Integrals rechenökonomisch nutzen.

Leitidee: Zahl – Variable – Operation

Grundlegende Integrationsverfahren werden angewendet.

Die Lernenden können:

- die Potenzregel, die Regel für konstanten Faktor, die Summenregel sowie das Substitutionsverfahren für die Bestimmung einer Stammfunktion verwenden.
- Stammfunktionsterme zu den Funktionstermen sin(x), cos(x), und 1/x angeben.
- den Hauptsatz der Integralrechnung zur Berechnung bestimmter Integrale nutzen.

Leitidee: Messen

Die Jugendlichen lernen die Integralrechnung als wichtiges Hilfsmittel zur Flächenberechnung kennen.

Die Lernenden können:

- Flächeninhalte zwischen Graphen und x-Achse zwischen zwei Graphen bestimmen.

VORANSICHT

RAAbits R0452-261233 © RAABE 2026 | Es gelten die Lizenzbedingungen

Auf einen Blick

M 1 Spickzettel

1	Hauptsatz und Integrationsregeln
2	Linearität des Integrals
3	Unbestimmtes Integral und Stammfunktionen
4	Partielle Integration
5	Substitutionsregel

M 2 Aufgaben

Aufgabe 1	Flächen zwischen Sinus und Kosinus
Aufgabe 2	Kosinus und Wurzel, Sinus mit verschiedenen Argumenten
Aufgabe 3	Sinus mit Wurzel als Argument

M 3 Tippkarten

Tippkarten	Hinweise und Hilfestellungen zu den einzelnen Aufgaben

Erklärung zu den Symbolen



Dieses Symbol markiert differenziertes Material. Wenn nicht anders ausgewiesen, befinden sich die Materialien auf mittlerem Niveau.

 einfaches Niveau

 mittleres Niveau

 schwieriges Niveau

VORANSICHT

M 1 Spickzettel

Spickzettel: Hauptsatz und Integrationsregeln

Hauptsatz der Integralrechnung

Die Gleichung

$$\int_a^b f(x)\,dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$$

beschreibt das **bestimmte Integral** von f über dem Intervall $[a, b]$. Es entspricht für $f(x) > 0$ dem Flächeninhalt zwischen dem Graph der Funktion f und der x-Achse über dem Intervall $[a, b]$.

Flächeninhalte unterhalb der x-Achse fließen als negative Werte in das berechnete Integral ein. Möchte man den tatsächlichen Flächeninhalt bestimmen, müssen Flächeninhalte über und unter der x-Achse separat berechnet und dann addiert werden.

Flächeninhalt zwischen zwei Funktionsgraphen

Gilt auf einem Intervall $[a, b]$ für zwei Funktionen $f(x)$ und $g(x)$: $f(x) \geq g(x)$, so beträgt der Flächeninhalt A zwischen den Funktionsgraphen:

$$A = \int_a^b (f(x) - g(x))\,dx.$$

Symmetrische Funktion – Symmetrie an der y-Achse

Ist $f(x) = f(-x)$, so gilt für das Integral:

$$\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 2 \cdot \int_0^a f(x)\,dx.$$

Potenzregel

$$\int x^n\,dx = \frac{1}{n+1} x^{n+1} + c, \text{ für } n \neq -1.$$

Dies gilt auch für rationale Exponenten:

$$\begin{aligned}\int \sqrt[m]{x^n}\,dx &= \int x^{n/m}\,dx \\ &= \left(\frac{1}{n/m+1}\right) x^{n/m+1} + c \\ &= \frac{m}{n+m} x^{n+m/m} + c \\ &= \frac{m}{n+m} \sqrt[m]{x^{n+m}}\end{aligned}$$

Sonderfall: $n = -1$:

$$\int x^{-1}\,dx = \int \frac{1}{x}\,dx = \ln(|x|) + c.$$

VORANSICHT