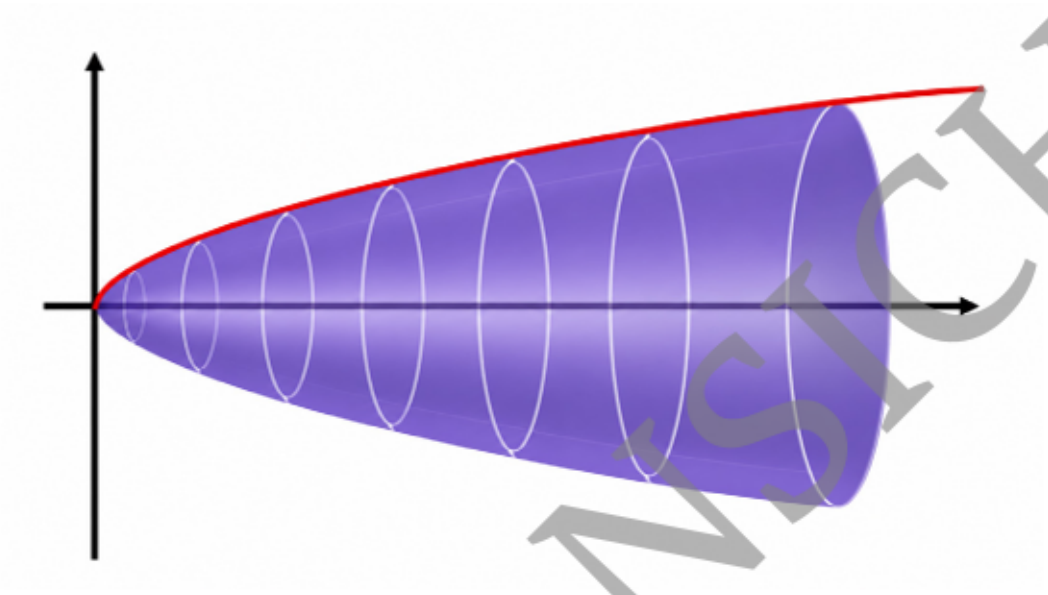
RAAbits

Mathe-Aufgaben zum Üben: Integralrechnung mit Wurzelfunktionen

Redaktion Mathematik



© RAABE

Dieser Aufgabensatz ermöglicht Ihren Lernenden eine ausführliche Beschäftigung mit der Integralrechnung von Wurzelfunktionen, auf verschiedenen Niveaustufen. Ihre Klasse bestimmt Flächeninhalte zwischen Graph und *x*-Achse und zwischen zwei Graphen. Die Lernenden nutzen dafür den Hauptsatz der Differenzial- und Integralrechnung und die Linearität des Integrals. Dabei kommen verschiedene Integrationsregeln und Methoden zum Einsatz, beginnend mit der Potenzregel bis hin zur partiellen Integration und der Substitutionsmethode.

KOMPETENZPROFIL

Klassenstufe	11/12/13
Dauer	2 Unterrichtsstunden, 6 Übungsaufgaben mit Lösungen
Inhalt:	bestimmtes Integral, Fläche zwischen Graphen, Substitutionsregel

VORANSICHT

Didaktisch-methodische Hinweise

Das Material umfasst Spickzettel zu den wichtigsten Vorkenntnissen, Definitionen und Rechenbeispielen (**M 1**), Aufgabenblätter mit 6 Übungsaufgaben auf unterschiedlichen Niveaus (**M 2**), Tippkarten (**M 3**) und Lösungen.
M 1 kann zur Wiederholung oder als Nachschlagehilfe dienen. **M 2** lässt sich als Arbeitsblatt austeilen oder für die gemeinsame Bearbeitung projizieren. Die Tippkarten (**M 3**) können vorab ausgeschnitten und am Pult bereitgelegt oder bei Bedarf gezielt ausgegeben werden. So stellen Sie sicher, dass Ihre Lernenden die Hinweise und Tipps nicht von Anfang an verwenden, sondern bedarfsgerecht darauf zugreifen. Die Lösungen eignen sich zur Selbstkontrolle und als Grundlage für die Besprechung im Plenum.

Lernvoraussetzungen
Die Lernenden beherrschen Kurvendiskussionen und sind in der Lage, den Funktionsgraphen einer gegebenen Funktion aufzustellen. Sie kennen die Ableitungsregeln der gängigen Funktionen und Begriffe wie Stetigkeit und Monotonie sind ihnen vertraut.

Lernziele
Leitidee: Funktionaler Zusammenhang
Die Jugendlichen lernen den Zusammenhang zwischen Ableitung und Integral kennen. Die Eigenschaften des Integrals nutzen sie für Flächeninhaltsberechnungen.
Die Lernenden können:
- den Wert des bestimmten Integrals als Flächeninhalt erklären.
- den Inhalt des Hauptsatzes der Integralrechnung angeben.
- die Linearität des Integrals rechenökonomisch nutzen.

Leitidee: Zahl – Variable – Operation
Grundlegende Integrationsverfahren werden angewendet.
Die Lernenden können:
- die Potenzregel, die Regel für konstanten Faktor, die Summenregel sowie das Substitutionsverfahren für die Bestimmung einer Stammfunktion verwenden.
- Stammfunktionsterme zu den Funktionstermen sin(x), cos(x), und 1/x angeben.
- den Hauptsatz der Integralrechnung zur Berechnung bestimmter Integrale nutzen.

Leitidee: Messen
Die Jugendlichen lernen die Integralrechnung als wichtiges Hilfsmittel zur Flächen- und Volumenberechnung kennen.
Die Lernenden können:
- Flächeninhalte zwischen Graphen und x-Achse zwischen zwei Graphen bestimmen.
- das Volumen von Körpern berechnen, die durch Rotation von Flächen um die x-Achse entstehen.

VORANSICHT

Auf einen Blick

M 1 Spickzettel

1	Hauptsatz und Integrationsregeln
2	Linearität des Integrals
3	Unbestimmtes Integral und Stammfunktionen
4	Partielle Integration
5	Substitutionsregel
6	Volumen eines Rotationskörpers

M 2 Aufgaben

Aufgabe 1	Einfache Wurzelfunktionen und Funktionenscharen
Aufgabe 2	Wurzel als Faktor und Kombination mit Exponentialfunktion
Aufgabe 3	Wurzel im Exponenten

M 3 Tippkarten

Tippkarten	Hinweise und Hilfestellungen zu den einzelnen Aufgaben

Erklärung zu den Symbolen



Dieses Symbol markiert differenziertes Material. Wenn nicht anders ausgewiesen, befinden sich die Materialien auf mittlerem Niveau.

 einfaches Niveau

 mittleres Niveau

 schwieriges Niveau

VORANSICHT

M 1 Spickzettel

Spickzettel: Hauptsatz und Integrationsregeln

Hauptsatz der Integralrechnung

Die Gleichung

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$$

beschreibt das **bestimmte Integral** von f über dem Intervall $[a, b]$. Es entspricht für $f(x) > 0$ dem Flächeninhalt zwischen dem Graph der Funktion f und der x-Achse über dem Intervall $[a, b]$.

Flächeninhalte unterhalb der x-Achse fließen als negative Werte in das berechnete Integral ein. Möchte man den tatsächlichen Flächeninhalt bestimmen, müssen Flächeninhalte über und unter der x-Achse separat berechnet und dann addiert werden.

Flächeninhalt zwischen zwei Funktionsgraphen

Gilt auf einem Intervall $[a, b]$ für zwei Funktionen $f(x)$ und $g(x)$: $f(x) \geq g(x)$, so beträgt der Flächeninhalt A zwischen den Funktionsgraphen:

$$A = \int_a^b (f(x) - g(x))\,\mathrm{d}x.$$

Symmetrische Funktion – Symmetrie an der y-Achse

Ist $f(x) = f(-x)$, so gilt für das Integral:

$$\int_{-a}^{a} f(x)\,\mathrm{d}x = 2 \cdot \int_0^a f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Potenzregel

$$\int x^n\,\mathrm{d}x = \frac{1}{n+1} x^{n+1} + c, \text{ für } n \neq -1.$$

Dies gilt auch für rationale Exponenten:

$$\begin{aligned}\int \sqrt[m]{x^n}\,\mathrm{d}x &= \int x^{n/m}\,\mathrm{d}x \\ &= \left(\frac{1}{n/m+1}\right) x^{n/m+1} + c \\ &= \frac{m}{n+m} x^{n+m/m} + c \\ &= \frac{m}{n+m} \sqrt[m]{x^{n+m}}\end{aligned}$$

Sonderfall: $n = -1$:

$$\int x^{-1}\,\mathrm{d}x = \int \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = \ln(|x|) + c.$$

VORANSICHT