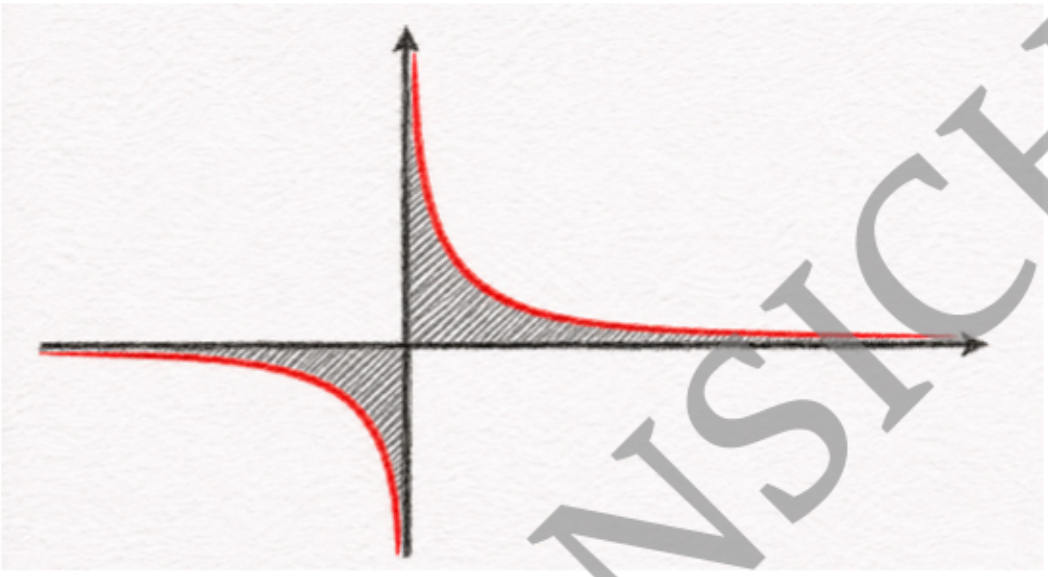
RAAbits

Mathe-Aufgaben zum Üben: Integralrechnung mit gebrochenrationalen Funktionen

Redaktion Mathematik



© RAABE

Mit diesem Material üben Lernende der Kursstufe die Integralrechnung an gebrochenrationalen Funktionen. Sie berechnen uneigentliche Integrale und Flächen zwischen Funktionsgraphen und *x*-Achse oder zwischen zwei Graphen. Spickzettel und Tippkarten unterstützen beim Anwenden des Hauptsatzes, der Integrationsregeln und der Flächenberechnung; ausführliche Lösungen ermöglichen die Selbstkontrolle.

KOMPETENZPROFIL

Klassenstufe	11/12/13
Dauer	2 Unterrichtsstunden
	6 Übungsaufgaben mit Lösungen
Inhalt:	uneigentliches Integral, Fläche zwischen Graphen, Stammfunktion

VORANSICHT

Didaktisch-methodische Hinweise

Das Material umfasst Spickzettel zu den wichtigsten Vorkenntnissen, Definitionen und Rechenbeispielen (**M 1**), Aufgabenblätter mit 6 Übungsaufgaben auf unterschiedlichen Niveaus (**M 2**), Tippkarten (**M 3**) und Lösungen.
M 1 kann zur Wiederholung oder als Nachschlagehilfe dienen. **M 2** lässt sich als Arbeitsblatt austeilen oder für die gemeinsame Bearbeitung projizieren. Die Tippkarten (**M 3**) können vorab ausgeschnitten und am Pult bereitgelegt oder bei Bedarf gezielt ausgegeben werden. So stellen Sie sicher, dass Ihre Lernenden die Hinweise und Tipps nicht von Anfang an verwenden, sondern bedarfsgerecht darauf zugreifen. Die Lösungen eignen sich zur Selbstkontrolle und als Grundlage für die Besprechung im Plenum.

Lernvoraussetzungen
Die Lernenden beherrschen Kurvendiskussionen und sind in der Lage, den Funktionsgraphen einer gegebenen Funktion aufzustellen. Sie kennen die Ableitungsregeln der gängigen Funktionen und Begriffe wie Stetigkeit und Monotonie sind ihnen vertraut.

Lernziele
Die Lernenden können:
- uneigentliche Integrale als Grenzwerte berechnen.
- gebrochenrationale Funktionen durch Polynomdivision umformen und ihre Stammfunktionen bestimmen.
- Nullstellen und Asymptoten gebrochenrationaler Funktionen ermitteln.
- Flächeninhalte zwischen einem Funktionsgraphen und der x-Achse sowie zwischen zwei Graphen mithilfe bestimmter Integrale berechnen.
- Berührpunkte zweier Graphen rechnerisch nachweisen.
- Integrale mit Logarithmusfunktionen auswerten und die zugehörigen Integrationsgrenzen bestimmen.

VORANSICHT

RAAbits R0452-261235 © RAABE 2026 | Es gelten die Lizenzbedingungen

Auf einen Blick

M 1 Spickzettel

1	Hauptsatz und Integrationsregeln
2	Linearität des Integrals
3	Unbestimmtes Integral und Stammfunktionen
4	Partielle Integration
5	Substitutionsregel
6	Volumen eines Rotationskörpers

M 2 Aufgaben

Aufgabe 1	Einfacher Grenzwert und Fläche zwischen Funktion und Tangente
Aufgabe 2	Funktionenschar und geschicktes Umformen
Aufgabe 3	Reziproke Funktion und Logarithmus

M 3 Tippkarten

Tippkarten	Hinweise und Hilfestellungen zu den einzelnen Aufgaben

Erklärung zu den Symbolen



Dieses Symbol markiert differenziertes Material. Wenn nicht anders ausgewiesen, befinden sich die Materialien auf mittlerem Niveau.

 einfaches Niveau

 mittleres Niveau

 schwieriges Niveau

VORANSICHT

M 1 Spickzettel

Spickzettel: Hauptsatz und Integrationsregeln

Hauptsatz der Integralrechnung

Die Gleichung

$$\int_a^b f(x)\,dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$$

beschreibt das **bestimmte Integral** von f über dem Intervall $[a, b]$. Es entspricht für $f(x) > 0$ dem Flächeninhalt zwischen dem Graph der Funktion f und der x-Achse über dem Intervall $[a, b]$.

Flächeninhalte unterhalb der x-Achse fließen als negative Werte in das berechnete Integral ein. Möchte man den tatsächlichen Flächeninhalt bestimmen, müssen Flächeninhalte über und unter der x-Achse separat berechnet und dann addiert werden.

Flächeninhalt zwischen zwei Funktionsgraphen

Gilt auf einem Intervall $[a, b]$ für zwei Funktionen $f(x)$ und $g(x)$: $f(x) \geq g(x)$, so beträgt der Flächeninhalt A zwischen den Funktionsgraphen:

$$A = \int_a^b (f(x) - g(x))\,dx.$$

Symmetrische Funktion – Symmetrie an der y-Achse

Ist $f(x) = f(-x)$, so gilt für das Integral:

$$\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 2 \cdot \int_0^a f(x)\,dx.$$

Potenzregel

$$\int x^n\,dx = \frac{1}{n+1} x^{n+1} + c, \text{ für } n \neq -1.$$

Dies gilt auch für rationale Exponenten:

$$\begin{aligned}\int \sqrt[m]{x^n}\,dx &= \int x^{n/m}\,dx \\ &= \left(\frac{1}{n/m+1}\right) x^{n/m+1} + c \\ &= \frac{m}{n+m} x^{n+m/m} + c \\ &= \frac{m}{n+m} \sqrt[m]{x^{n+m}}\end{aligned}$$

Sonderfall: $n = -1$:

$$\int x^{-1}\,dx = \int \frac{1}{x}\,dx = \ln(|x|) + c.$$

VORANSICHT