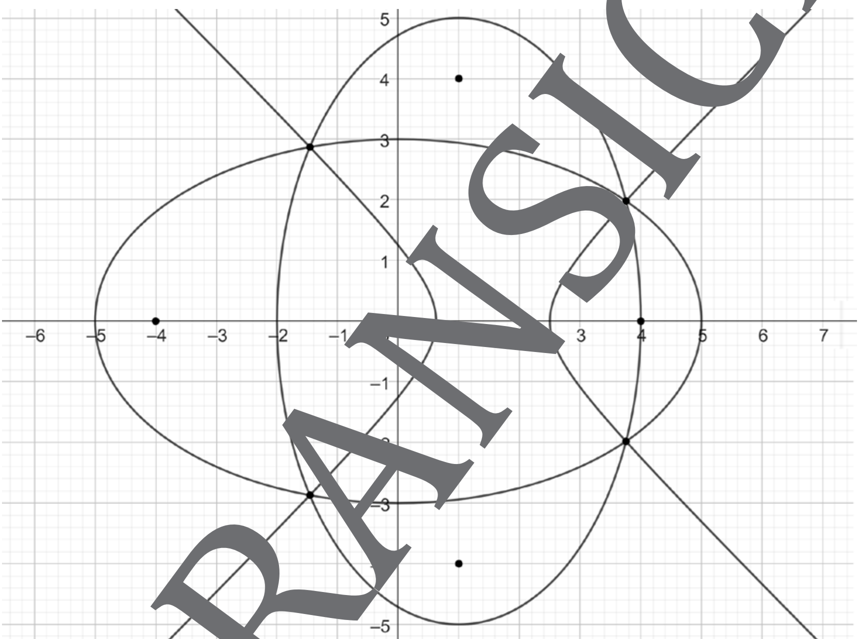
Krummlinige Figuren – Kegelschnitte

Übungsaufgaben zur ebenen Geometrie – Geraden, Kreise, Kegelschnitte

Alfred Müller



© Günter Gerstbrein

In einer Reihe von Übungsaufgaben, die sich auch zur Abiturvorbereitung eignen, arbeiten die Schülerinnen und Schüler mit den verschiedenen Kegelschnitten. Sie betrachten Kreise, Parabeln, Hyperbeln und Ellipsen und bestimmen Schnittpunkte, Polare, Tangenten und Sekanten. Auch die Ermittlung von Ortskurven bestimmter Punkte, wenn einzelne Parameter variiert werden, ist Teil der Aufgaben.

KOMPETENZPROFIL

Klassenstufe:	11/12/13
Kompetenzen:	Analysekompetenz, mathematisch argumentieren und beweisen, mathematische Darstellungen verwenden, mit mathematischen Objekten umgehen, Problemlösekompetenz
Methoden:	Abiturvorbereitung, Analyse, Auswertung, Übung
Thematische Bereiche:	Ebene Geometrie, Vektor, Gerade, Kegelschnitt, Kreis, Ellipse, Hyperbel, Parabel, Tangente, Polare, Sekante

Fachliche Hinweise

Die Lernenden sind mit dem kartesischen Koordinatensystem vertraut und können mit Vektoren rechnen. Sie kennen die Gleichungen von Kreis, Parabel, Ellipse und Hyperbel sowie deren einzelne Bestimmungselemente. Sie sind in der Lage, Schnittpunkte zu bestimmen und Tangenten oder Polare zu einem Kegelschnitt aufzustellen.

Auf einen Blick

Übungsaufgaben zur ebenen Geometrie – Geraden, Kreise, Kegelschnitte

M 1 Aufgaben

Erklärung zu den Symbolen

Dieses Symbol markiert differenziertes Material. Wenn nicht anders ausgewiesen, befinden sich die Materialien auf mittlerem Niveau.

leichtes Niveau mittleres Niveau schwieriges Niveau

Aufgaben

M 1

1. In einem rechtwinkligen Koordinatensystem bilden der Ursprung O sowie die Punkte A(8|8) und B(6|–6) das Dreieck OAB.

   a) Zeichnen Sie das Dreieck OAB und bestimmen Sie die Gleichung des Inkreises k_1 sowie deren Berührpunkte mit den Dreieckseiten. Zeichnen Sie den Inkreis ein.

   b) Das Dreieck OAB besitzt auch einen Umkreis k_2. Bestimmen Sie dessen Gleichung und fertigen Sie eine Skizze an. Berechnen Sie dann die Tangenten an den Umkreis in den Eckpunkten des Dreiecks OAB.

   c) Einem beliebigen Punkt $P(p_1|p_2)$, der nicht in den Koordinatenursprung fällt, ist ein Punkt $Q(q_1|q_2)$ wie folgt zugeordnet:
   Die Punkte O, P und Q sind die Ecken eines bei O rechtwinkligen Dreiecks OPQ, deren Eckpunktfolge dem mathematisch positiven Durchlaufsinn entspricht.
   Ferner gilt für die Länge der Katheten [OP] und [OQ] die Beziehung
   $|\overrightarrow{OQ}| : |\overrightarrow{OP}| = 3 : 4$

   i. Drücken Sie die Koordinaten des Punktes $Q(q_1|q_2)$ durch jene des Punktes $P(p_1|p_2)$ aus.

   ii. Der Punkt P durchläuft den Kreis k_1. Auf welcher Kurve bewegt sich dann der Punkt Q? Stellen Sie die Gleichung dieser Kurve auf.

2. In einem rechtwinkligen Koordinatensystem ist der Kreis k mit dem Mittelpunkt M(5|5) und dem Radius $r = \sqrt{10}$ gegeben.

   a) Wie lauten die Gleichungen der Tangenten, die sich vom Ursprung O aus an den Kreis k legen lassen. Fertigen Sie eine Zeichnung an.

   b) Der Kreis k´, der durch den Punkt A(7|4) hindurchgeht, schneidet den Kreis k im Punkt B(6|2) senkrecht. Ergänzen Sie die Zeichnung von Teilaufgabe a).

   c) Einem beliebigen Punkt $P(p_1|p_2)$ wird ein Punkt $Q(q_1|q_2)$ als Bildpunkt durch folgende Vorschrift zugeordnet:
   P´ sei der Spiegelpunkt von P bezüglich der x-Achse. Die Strecke zwischen P und dem Punkt C(5|0) werde durch den Punkt $R(r_1|r_2)$ halbiert.
   Die Gerade OR schneidet die Gerade CP´ im Punkt Q.

   i. Drücken Sie die Koordinaten q_1 und q_2 durch die Koordinaten p_1 und p_2 des Punktes P aus.

   ii. Auf welcher Kurve g_P müssen sich die Punkte P befinden, wenn deren Bildpunkte Q sämtlich auf der Geraden $g_Q : x_1 - 3x_2 = 0$ liegen sollen.

5. Gegeben sind die Punkte P(0|12), Q(16|0) und R(−9|0).
   a) Wie lauten die Gleichungen der Geraden, die die Winkel ∡PRQ und ∡PQR halbieren?
   b) Wo schneiden sich diese beiden Winkelhalbierenden?
   c) k sei der Inkreis des Dreiecks PQR. Stellen Sie die Gleichung des Kreises k auf.
   d) Wie lauten die Gleichungen der Mittelsenkrechten der Strecken [PQ] und [PR]?
   e) Auf welchem geometrischen Ort bewegt sich der Schnittpunkt S dieser Mittelsenkrechten, wenn der Punkt P auf der x_2-Achse wandert?

   Führen Sie während der gesamten Aufgabe eine genaue Zeichnung aus.

6. Ein Kreis k_1 berührt die Gerade g mit der Gleichung $3x_1 - 4x_2 - 18 = 0$ in ihrem Schnittpunkt A mit der x_1-Achse und geht außerdem durch den Punkt B(8|4).
   a) Bestimmen Sie eine Gleichung des Kreises k_1 und zeigen Sie, dass k_1 durch den Ursprung O geht und die Gerade mit der Gleichung $x_1 = -2$ berührt.
   Berechnen Sie die Koordinaten des Berührpunktes C.
   b) Wenn der Durchmesser des Kreises k_1 im Ursprung O beginnt: Wie lauten die Koordinaten des gegenüberliegenden Punktes D?
   c) Berechnen Sie das Verhältnis $q = \overline{CO} : \overline{CD}$.
   d) Ein Punkt P bewege sich so, dass stets gilt: $\overline{PO} : \overline{PD} = 1 : 2$. Zeigen Sie, dass der geometrische Ort für P ein Kreis k_2 ist, dessen Mittelpunkt M_2 auf der Geraden OD liegt.
   e) Der Kreis k_2 schneidet die Gerade OD in den Punkten S und T. Beweisen Sie, dass diese Punkte S und T mit D und O vier harmonische Punkte bilden.

7. Gegeben sind der Kreis k: $x_1^2 + x_2^2 = r^2$ und der Punkt S(a|0) mit a > 1.
   Eine Parabel $\wp$: $x_2^2 = 2p(x_1 - a)$ mit dem Punkt S als Scheitel verläuft durch die Schnittpunkte A und B von k mit der x_2-Achse.
   a) Berechnen Sie den Parameter p der Parabel $\wp$ in Abhängigkeit von a und r.
   Stellen Sie die Gleichung der Parabel $\wp$ auf und berechnen Sie die weiteren Schnittpunkte C und D zwischen Parabel und Kreis.
   b) Welche Beziehung muss zwischen a und r bestehen, dass es außer A und B noch 2, 1 oder keine weitere gemeinsame Punkte gibt?
   Zeichnen Sie die Parabel $\wp$ für a = 7 LE, r = 6 LE.
   c) Bei festem a ändere sich r, folglich auch C und D. Welcher Kurve folgen diese beiden Punkte? Stellen Sie die Gleichung auf.