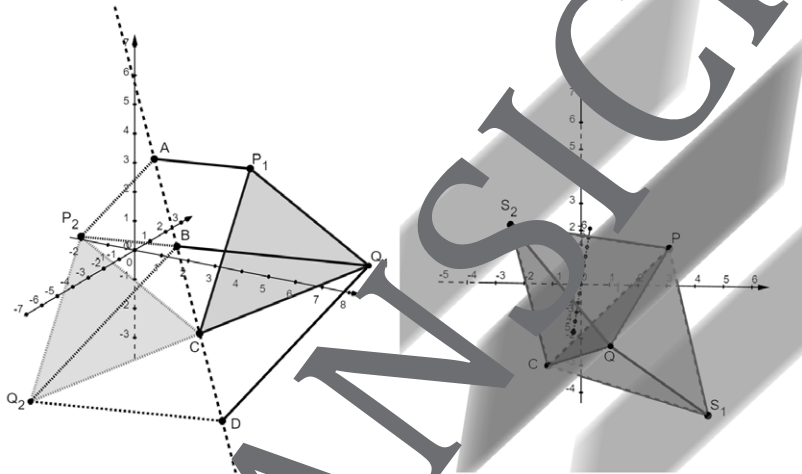


I.2.29

Flächen- und Rauminhalte – Inhaltsberechnungen

Gleichseitige Dreiecke und ein Tetraeder

Günther Weber



Die Punkte A, B, C und D liegen in dieser Reihenfolge auf einer Geraden, wobei der Abstand von A nach B und von C nach D gleich ist. Erweitert man die Strecke $\overline{AB}$ und $\overline{BD}$ durch zwei Punkte P und Q zu einem gleichseitigen Dreieck, so ist das Dreieck CQP wiederum gleichseitig. Dieses Dreieck bildet die Grundfläche eines Tetraeders. Mit den Methoden der Analytischen Geometrie werden die Punkte P und Q bestimmt, und die Grundflächenebene sowie der Tetraeder hinsichtlich anderer Ebenen bzw. einer Geraden untersucht. Ebenso werden Oberfläche und Volumen des Tetraeders abhängig vom Abstand der Punkte B und C berechnet.

KOMPETENZPROFIL

Klassenstufe:	10/11/12/13
Dauer:	3–5 Unterrichtsstunden
Kompetenzen:	Probleme mathematisch lösen (K2), mathematische Darstellungen verwenden (K4), mit mathematischen Objekten umgehen (K5), mit Medien mathematisch arbeiten (K6)
Methoden:	Abiturvorbereitung, Diskussion, Übung
Materialart:	Arbeitsblatt, Definition, GeoGebra-Datensatz
Inhalt:	Normalenvektor, Ebenengleichung (Parameterform, Koordinatenform, Hessesche Normalenform), Abstand Punkt – Ebene, Geradengleichung Schnittpunkt von Gerade und Ebene, Abstand von Punkten, Schnittwinkel, Winkelfunktionen im rechtwinkligen Dreieck, Kosinussatz, Tetraeder (Oberfläche, Volumen), Beweis (Kongruenzsätze)

Fachliche Hinweise

Die Schülerinnen und Schüler nutzen ihre bereits erworbenen Fähigkeiten in der analytischen Geometrie im räumlichen Koordinatensystem weiter anzuwenden. Sie bestimmen fehlende Eckpunkte von gleichseitigen Dreiecken und untersuchen die Lage von Geraden und Ebenen bezüglich der Grundflächenebene eines Tetraeders und bestimmen Schnittwinkel. Sie weisen allgemein nach, dass ein Dreieck gleichseitig ist, und ergänzen das gleichseitige Dreieck zu einem Tetraeder, dessen Oberfläche und Volumen sie noch näher betrachten.

Didaktisch-methodische Hinweise

Lernvoraussetzungen:

Die Lernenden kennen die Zwei-Punkte-Form bzw. Punkt-Richtungs-Form der Geradengleichung sowie die (Hessesche-) Normal-, Koordinaten- und Parameterform der Ebenengleichung. Die Bestimmung des Schnittpunktes einer Geraden mit einer Ebene bereitet ihnen keine Probleme. Die Jugendlichen können mit den Methoden der analytischen Geometrie Abstandsberechnungen und Winkelberechnungen durchführen sowie Volumen und Oberfläche von Tetraedern bestimmen. Der Kosinussatz und die Kongruenzsätze müssen eventuell wiederholt werden.

Lehrplanbezug:

Im Kernlernplan des Landes Nordrhein-Westfalen

https://www.schulentwicklung.nrw.de/lehrplaene/lehrplan/47/KLP_GOST_Mathematik.pdf

(aufgerufen am 06.06.2025) finden sich unter anderem folgende Kompetenzerwartungen, die der Beitrag gezielt fördert:

Die Schülerinnen und Schüler ...

- stellen Geraden und Strecken in Parameterform dar,
- stellen Ebenen in Koordinaten- und in Parameterform dar,
- bestimmen Schnittpunkte von Geraden sowie Durchstoßpunkte von Geraden mit Ebenen,
- deuten das Skalarprodukt geometrisch und berechnen,
- untersuchen mithilfe des Skalarprodukts geometrische Effekte und Situationen im Raum (Orthogonalität, Winkel- und Längenberechnung),
- stellen Ebenen in Normalenform dar,
- bestimmen Abstände zwischen Punkten, Geraden und Ebenen.

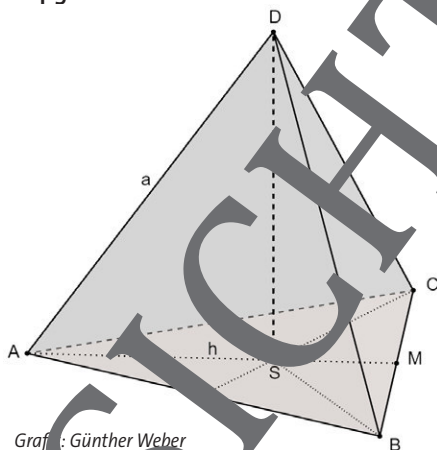
Zudem nutzen die Lernenden mathematische Hilfsmittel und digitale Werkzeuge zur Veranschaulichung der Aufgabenstellung und zur Überprüfung der Ergebnisse.

Methodisch-didaktische Anmerkungen:

Einige Teile der **Aufgabe 1)** und **Aufgabe 2)** (z. B. 1a, 1b, 1c, 1f, 2a, 2b) können auch im hilfsmittelfreien Teil des Abiturs vorkommen. Einige sollten daher händisch gelöst werden. Für die Aufgabenteile 1d), 1e) und 2c) gibt mehrere Lösungsmöglichkeiten. Sie können ihre Lerngruppe bei diesen Aufgaben aufteilen und die einzelnen Gruppen lösen die Aufgaben mit verschiedenen Lösungsmöglichkeiten. Anschließend besprechen die Jugendlichen ihre jeweiligen Lösungswege und vergleichen hinsichtlich des Arbeitsaufwandes und der Schwierigkeit. Vor der Bearbeitung von **Aufgabe 3b)** ist es günstig, die Kongruenzsätze und den Kosinussatz zu wiederholen. Vor der Bearbeitung von **Aufgabe 3c)** sollte die Seitenlänge des Dreiecks $\triangle QP$ abhängig vom Abstand der Punkte B und C bekannt sein.

Das Tetraeder – eine gleichseitige Dreieckspyramide

Die Oberfläche eines Tetraeders besteht aus vier gleichseitigen Dreiecken. Ist das Dreieck ABC die gleichseitige Grundfläche des Tetraeders, so trifft das Lot von der Spitze im Punkt D die Grundfläche im Schwerpunkt S der Grundfläche. Der Schwerpunkt S teilt die Seitenhalbierenden im Verhältnis 2 : 1. Im gleichseitigen Dreieck fallen die Höhen, die Seitenhalbierenden, die Mittelsenkrechten und die Winkelhalbierenden zusammen.



Grafik: Günther Weber

Berechnung von Höhe und Flächeninhalt im gleichseitigen Dreieck:

Das Grundflächendreieck ABC wird durch die Seitenhalbierende/Dreieckshöhe in zwei kongruente rechtwinklige Dreiecke geteilt. Ist a die Kantenlänge des Tetraeders (= Seitenlänge des Dreiecks), erhält man mit dem Satz des Pythagoras, angewendet auf das Tetraeder ABM

$$\left(\frac{a}{2}\right)^2 + h^2 = a^2$$

$$h^2 = a^2 - \frac{a^2}{4} = \frac{3}{4}a^2$$

$$h = \frac{\sqrt{3}}{2}a = \frac{a\sqrt{3}}{2}$$

Der Flächeninhalt eines Dreiecks mit der Grundseite g und der Höhe h berechnet sich nach der Formel $A = \frac{1}{2} \cdot g \cdot h$. Für das gleichseitige Dreieck erhält man somit

$$A = \frac{1}{2} \cdot a \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{a^2}{4} \cdot \sqrt{3}$$

Berechnung der Höhe im Tetraeder:

Der Schwerpunkt S teilt die Seitenhalbierenden im Verhältnis 2 : 1; somit ist

$$|\overline{AS}| = \frac{2}{3}h = \frac{2}{3} \cdot \frac{a}{2} \sqrt{3} = \frac{a}{3} \sqrt{3}$$

Wendet man den Satz des Pythagoras auf das Dreieck ASD an, so gilt:

$$\left(\frac{a}{3}\sqrt{3}\right)^2 + H^2 = a^2$$

$$H^2 = \frac{2}{3}a^2$$

$$H = a \cdot \sqrt{\frac{2}{3}} = \frac{a}{3} \cdot \sqrt{6}$$

Das Volumen einer Pyramide mit der Grundfläche G und der Höhe H berechnet sich nach der Formel

$$V = \frac{1}{3} \cdot G \cdot H.$$

Das Tetraeder hat somit ein Volumen von

$$V = \frac{a^2}{4} \cdot \sqrt{3} \cdot \frac{a}{3} \cdot \sqrt{6} = \frac{a^3}{12} \cdot \sqrt{18} = \frac{a^3}{4} \cdot \sqrt{2}$$

Mehr Materialien für Ihren Unterricht mit RAAbits Online

Unterricht abwechslungsreicher, aktueller sowie nach Lehrplan gestalten – und dabei Zeit sparen.
Fertig ausgearbeitet für über 20 verschiedene Fächer, von der Grundschule bis zum Abitur: Mit RAAbits Online stehen redaktionell geprüfte, hochwertige Materialien zur Verfügung, die sofort einsetz- und editierbar sind.

- ✓ Zugriff auf bis zu **400 Unterrichtseinheiten** pro Fach
- ✓ Didaktisch-methodisch und **fachlich geprüfte Unterrichtseinheiten**
- ✓ Materialien als **PDF oder Word** herunterladen und individuell anpassen
- ✓ Interaktive und multimediale Lerneinheiten
- ✓ Fortlaufend **neues Material** zu aktuellen Themen



Testen Sie RAAbits Online
14 Tage lang kostenlos!

www.raabits.de

