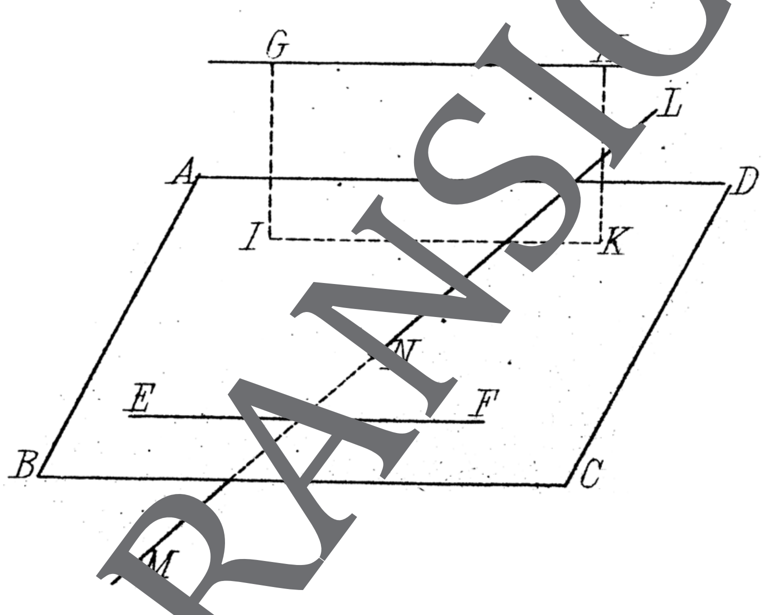
E.2.43

Geraden und Ebenen – Lagebeziehungen

Schwerpunkt, Schnittpunkt, Abstand – Übungsaufgaben mit Geraden und Ebenen

Alfred Müller



Zwei Übungsblätter bieten Ihrer Klasse eine Reihe von Aufgaben aus dem Bereich der Analytischen Geometrie. Die Jugendlichen arbeiten im dreidimensionalen Raum, stellen Gleichungen für Geraden und Ebenen auf und bestimmen Schnittpunkte, Schnittgeraden und Schnittwinkel. Auch Abstandsberechnungen und die Ermittlung des Rauminhalts einer Pyramide sind Teil der Rechenbeispiele.

KOMPETENZPROFIL

Klassenstufe:	10/11/12/13
Kompetenzen:	Analysekompetenz, mathematisch argumentieren und beweisen, mathematische Darstellungen verwenden, mit mathematischen Objekten umgehen, Problemlösekompetenz
Methoden:	Analyse, Diskussion, Übung
Materialtyp	Arbeitsblatt, Differenzierungsmaterial, Textimpuls,
Thematische Bereiche:	Punktraum $\mathbb{R}^3$, Punkte, Geraden, Ebenen, Hesse-Form, Schnittpunkt, Schnittgerade, Schnittwinkel, Spurpunkt, Schwerpunkt, Pyramide, Volumen

Fachliche Hinweise

Die Lernenden können mit Geraden und Ebenen umgehen. Sie berechnen Abstände, Schnittpunkte, Schnittgeraden und Schnittwinkel.

Auf einen Blick

Schwerpunkt, Schnittpunkt, Abstand – Übungsaufgaben mit Ebenen und Geraden

M 1	Mittelpunkt, Schwerpunkt, Spurpunkt, Geraden, Ebenen
M 2	Geraden, Ebenen und ihre gegenseitige Lage

Erklärung zu den Symbolen

Dieses Symbol markiert differenziertes Material. Wenn nicht anders ausgewiesen, befinden sich die Materialien auf mittlerem Niveau.		
leichtes Niveau	mittleres Niveau	schwieriges Niveau
Zusatzaufgabe	Alternative	

Mittelpunkt, Schwerpunkt, Spurpunkt, Gerade, Ebene

M 1

1. Im Punktraum $\mathbb{R}^3$ sind die Punkte A(1|1|2), B(–1|0|5), C(6|2|2) und T(3| t_2 |–1) gegeben.
   a) Geben Sie eine Gleichung der Geraden g = AB durch die Punkte A und B an und berechnen Sie t_2 so, dass der Punkt T auf der Geraden g liegt.
   Bestimmen Sie dann das Teilverhältnis t, in dem der Punkt T die Strecke [AB] teilt und veranschaulichen Sie die Lage der drei Punkte A, B, und T anhand einer maßstäblichen Skizze.
   b) Zeigen Sie, dass der Punkt C nicht auf der Geraden g liegt. Bestimmen Sie dann den Mittelpunkt M der Strecke [BC] sowie den Schwerpunkt S des Dreiecks ABC. Welche Innenwinkel α, β und γ und welchen Flächeninhalt besitzt das Dreieck ABC?
   c) Die drei Punkte A, B, C legen eine Ebene E fest. Bestimmen Sie für diese Ebene E eine Gleichung in Normalenform. Welchen Abstand d besitzt der Ursprung O von der Ebene E?
   d) Der Punkt S(3|3|3) ist die Spitze einer dreiseitigen Pyramide ABCS.
   Bestimmen Sie das Volumen dieser Pyramide.

2. Gegeben ist ferner die Gerade $h: \vec{x} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ [illegible] \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$.
   a) Welche besondere Lage hat die Gerade h im Koordinatensystem?
   Bestimmen Sie die Koordinaten des Durchstoßpunktes P der Geraden h durch die x_2x_3 -Ebene.
   b) Berechnen Sie die Koordinaten des Schnittpunktes R der Geraden h mit der Ebene E aus Teilaufgabe 1c) und zeigen Sie, dass R auch auf der Geraden g aus Aufgabe 1a) liegt.
   c) Begründen Sie, dass die Gerade h und der Punkt A eindeutig eine Ebene F bestimmen. Welche Gleichung besitzt F in Normalenform?
   d) Die Ebenen E und F schneiden sich in einer Geraden s unter dem Winkel φ. Geben Sie eine Gleichung von s an und bestimmen Sie den Winkel φ.

Lösungen

M 1 – Mittelpunkt, Schwerpunkt, Spurpunkt, Gerade, Ebene

Aufgabe 1

A(1|1|2), B(–1|0|5), C(6|2|2), T(3| t_2 |–1)

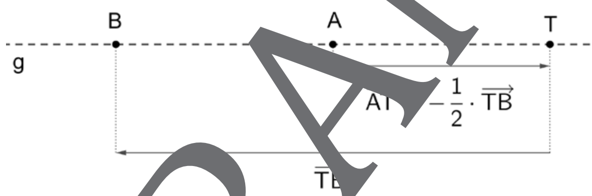
a) $g = AB: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$

T in g:

$$\left.\begin{array}{ll} (1) & 3 = 1 - 2\lambda \\ (2) & t_2 = 1 - \lambda \\ (3) & -1 = 2 + 3\lambda \end{array}\right\} (1)\text{ und }(3) \Rightarrow \lambda = -1 \Rightarrow t_2 = 2 \Rightarrow T(3|2|-1)$$

$$\overrightarrow{AT} = \tau \cdot \overrightarrow{TB} \Rightarrow \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} = \tau \cdot \begin{pmatrix} -4 \\ -2 \\ 6 \end{pmatrix} \Rightarrow \tau = -\frac{1}{2}$$

Skizze:



Grafik: Günter Gerstein

b) C in g:

$$\left.\begin{array}{lll} (1) & 6 = 1 - 2\lambda & \Rightarrow \lambda = -2{,}5 \\ (2) & 2 = 1 - \lambda & \Rightarrow \lambda = -1 \\ (3) & 2 = 2 + 3\lambda & \Rightarrow \lambda = 0 \end{array}\right\} \text{Widerspruch!} \Rightarrow C \notin g$$

Mittelpunkt M der Strecke [BC]:

$$\vec{m} = \frac{1}{2}(\vec{b} + \vec{c}) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2{,}5 \\ 1 \\ 3{,}5 \end{pmatrix} \Rightarrow M(2{,}5|1|3{,}5)$$

Schwerpunkt S des Dreiecks ABC:

$$\vec{s}=\frac{1}{3}\left(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}\right)=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}6\\3\\9\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\1\\3\end{pmatrix}\Rightarrow S(2|1|3)$$

Innenwinkel des Dreiecks ABC:

$$\cos\alpha=\frac{\overrightarrow{AB}\circ\overrightarrow{AC}}{\left|\overrightarrow{AB}\right|\cdot\left|\overrightarrow{AC}\right|}=\frac{\begin{pmatrix}-2\\-1\\3\end{pmatrix}\circ\begin{pmatrix}5\\1\\0\end{pmatrix}}{\sqrt{14}\cdot\sqrt{26}}=\frac{-10-1}{\sqrt{364}}=\frac{-11}{\sqrt{364}}$$

$\Rightarrow \alpha=125{,}21°$

$$\cos\beta=\frac{\overrightarrow{BA}\circ\overrightarrow{BC}}{\left|\overrightarrow{BA}\right|\cdot\left|\overrightarrow{BC}\right|}=\frac{\begin{pmatrix}2\\1\\-3\end{pmatrix}\circ\begin{pmatrix}7\\2\\-3\end{pmatrix}}{\sqrt{14}\cdot\sqrt{62}}=\frac{14+2+9}{\sqrt{868}}=\frac{25}{\sqrt{868}}$$

$\Rightarrow \beta=31{,}95°$

$\gamma=180°-(\alpha+\beta)=180°-157{,}16=22{,}84°$

$$A_\Delta=\frac{1}{2}\left|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\right|=\frac{1}{2}\left|\begin{pmatrix}-2\\-1\\3\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}5\\1\\0\end{pmatrix}\right|=\frac{1}{2}\left|\begin{pmatrix}-3\\15\\3\end{pmatrix}\right|=\frac{1}{2}\sqrt{243}=\frac{9}{2}\sqrt{3}\text{ FE}$$

c) Ebene E durch A, B, C:

$$E:\ \vec{x}=\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}+\lambda\cdot\begin{pmatrix}-2\\-1\\3\end{pmatrix}+\mu\cdot\begin{pmatrix}5\\1\\0\end{pmatrix}$$

Einen Normalenvektor von E bekommt man mithilfe des Kreuzprodukts der beiden Richtungsvektoren. Dieses wurde bereits unter 1b) berechnet:

$$\overrightarrow{n_E}=\begin{pmatrix}-3\\15\\3\end{pmatrix}=-3\begin{pmatrix}1\\-5\\-1\end{pmatrix}\Rightarrow\overrightarrow{n_E}=\begin{pmatrix}1\\-5\\-1\end{pmatrix}$$

$$E:\ \begin{pmatrix}1\\-5\\-1\end{pmatrix}\circ\vec{x}=\begin{pmatrix}1\\-5\\-1\end{pmatrix}\circ\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}=1-5-2=-6$$

$\Rightarrow E: x_1-5x_2-x_3+6=0$

Aufgabe 2

$$g:\vec{x}=\begin{pmatrix}-1\\-1\\0\end{pmatrix}+\sigma\cdot\begin{pmatrix}2\\1\\2\end{pmatrix},\ h:\vec{x}=\begin{pmatrix}1\\6\\-1\end{pmatrix}+\tau\cdot\begin{pmatrix}-2\\2\\1\end{pmatrix}$$

a) Wegen $\begin{pmatrix}2\\1\\2\end{pmatrix}\neq r\cdot\begin{pmatrix}-2\\2\\1\end{pmatrix}$ sind die Geraden g und h nicht parallel.

$g\cap h$:

$$\begin{array}{ll}(1) & -1+2\sigma=1-2\tau\\ (2) & -1+\sigma=6-2\tau\\ (3) & 2\sigma=-1+\tau\\ \hline\end{array}$$

$(1)-(3): -1=2-3\tau \Rightarrow \tau=1 \wedge \text{in}\,(3): \sigma=0$

$\text{in}\,(2): -1+0=6+2$ f. A.

$\Rightarrow$ kein Schnitt

$\Rightarrow$ Die Geraden g und h sind windschief

b) Ebene E:

$$E:\vec{x}=\begin{pmatrix}-1\\-1\\0\end{pmatrix}+\sigma\cdot\begin{pmatrix}2\\1\\2\end{pmatrix}+\tau\cdot\begin{pmatrix}-2\\2\\1\end{pmatrix}$$

Ein Normalenvektor von E wird mithilfe des Kreuzprodukts der Richtungsvektoren von E bestimmt. Es gilt:

$$\overrightarrow{n_E}=\begin{pmatrix}2\\1\\2\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}-2\\2\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-3\\-6\\6\end{pmatrix}=-3\cdot\begin{pmatrix}1\\2\\-2\end{pmatrix}$$

$$E:\begin{pmatrix}1\\2\\-2\end{pmatrix}\circ\vec{x}=\begin{pmatrix}1\\2\\-2\end{pmatrix}\circ\begin{pmatrix}-1\\-1\\0\end{pmatrix}=-1-2=-3$$

$\Rightarrow E: x_1+2x_2-2x_3+3=0$

Jeder Punkt der Geraden h, z. B. der Antragspunkt H(1|6|–1) hat von der Ebene E den gesuchten Abstand. Berechnet wird dieser mithilfe der Hesse-Form:

$$E: -\frac{1}{3}\left(x_1+2x_3-2x_3+3\right)=0$$

$$d_{gh}=d_{EH}=\left|-\frac{1}{3}(1+12+2+3)\right|=\frac{18}{3}=6\,\text{LE}$$

c) Die Ebene E', welche die Gerade g enthält und in Richtung des kürzesten Abstands zeigt, schneidet die Gerade h im Punkt B. Dabei entspricht die Richtung des kürzesten Abstands dem Normalenvektor $\vec{n_E}$ der Ebene E.

$$E': \vec{x} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + \sigma \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \nu \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$$

Ein Normalenvektor für E' wird wieder mithilfe des Vektorprodukts bestimmt.

$$\vec{n_{E'}} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 \\ 6 \\ 3 \end{pmatrix} = -3 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$E': \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix} \circ \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = 2 - 2 = 0$$

$$\Rightarrow E': 2x_1 - 2x_2 - x_3 = 0$$

h in E':

$$2 - 4\tau - 12 - 4\tau + 1 - \tau = 0$$
$$-9\tau - 9 = 0 \Rightarrow \tau = -1 \Rightarrow B(3|4|-2)$$

Die Lotgerade q durch B in Richtung des kürzesten Abstands schneidet die Gerade g im Punkt A.

$$q: \vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix} + \omega \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} \cap g$$

$$\begin{aligned} &(1) \quad 3 + \omega &&= -1 + 2\sigma \\ &(2) \quad 4 + 2\omega &&= -1 + \sigma \\ &(3) \quad -2 - 2\omega &&= 2\sigma \end{aligned}$$

$$(2) + (3): 2 = -1 + 3\sigma \Rightarrow \sigma = 1 \wedge \text{in } (2) \Rightarrow \omega = -2$$

$$\text{in } (1): 3 - 2 = -1 + 2 \quad \text{w. A.} \Rightarrow A(1|0|2)$$

Probe:

$$|\vec{AB}| = \left| \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -4 \end{pmatrix} \right| = 6\,\text{LE} = d_{gh}$$