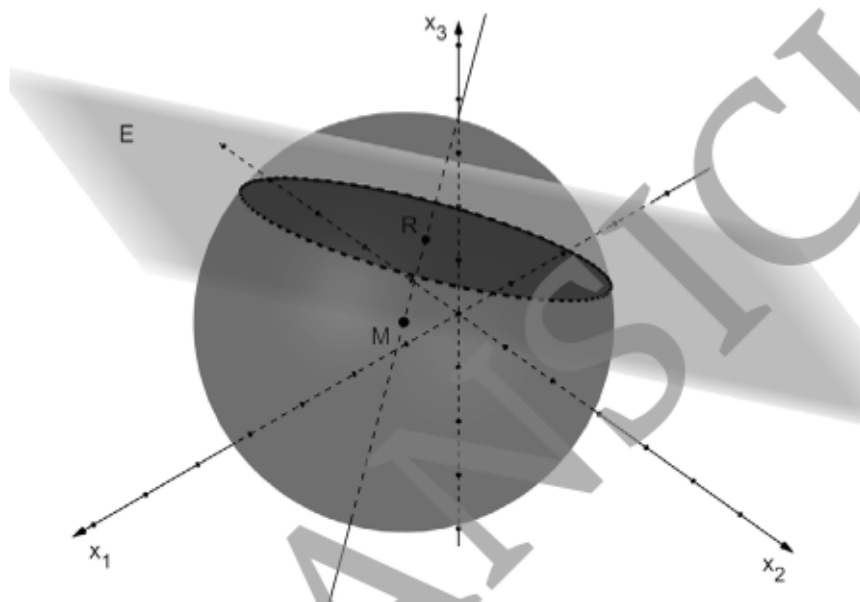


H.1.58

Krummlinige Figuren – Kreis und Kugel

Vermischte Übungen mit Kugeln, Geraden und Ebenen

Alfred Müller



Grafik: Günter Gerstbrein

Wie liegt eine Ebene relativ zu einer Kugel? Ist eine gegebene Gerade eine Tangente?

Und wenn nein, wie lang ist die Sehne?

Fünf Übungsblätter stellen Ihre Klasse diese und andere Fragen. Die Lernenden arbeiten mit der Kugelgleichung, legen Tangentialebenen oder bestimmen Daten eines Schnittkreises. Sie prüfen die Lage von Objekten zueinander und trainieren dabei ihr räumliches Vorstellungsvermögen.

KOMPETENZPROFIL

Klassenstufe:	10/11/12/13
Kompetenzen:	Analysekompetenz, mathematisch argumentieren und beweisen, mathematische Darstellungen verwenden, mit mathematischen Objekten umgehen, Problemlösekompetenz
Methoden:	Analyse, Diskussion, Übung
Materialtyp	Arbeitsblatt, Differenzierungsmaterial, Textimpuls
Thematische Bereiche:	Kugelgleichung, Kugel, Ebene, Ebenengleichung, Hesse-Form, Abstandsberechnung Tangentialebene, Schnittpunkt, Schnittwinkel Schnittgerade, Schnittkreis, Lotgerade, gegenseitige Lage, Satz des Pythagoras

Fachliche Hinweise

Die Lernenden kennen die Kugelgleichung und können damit arbeiten. Auch die Gleichungen von Ebenen und Geraden im dreidimensionalen Raum sind ihnen ein Begriff. Sie beherrschen Abstands- und Winkelberechnungen und sind in der Lage, die Hesse-Form einer Ebene anzuwenden.

Auf einen Blick

Vermischte Übungen mit Kugeln, Geraden und Ebenen

M 1	Kugeln, Dreiecke und Punkte
M 2	Kugeln, Gerade und Ebene
M 3	Kugeln, Ebene, Dreiecke, Kreis
M 4	Geraden, Ebenen, Kugeln I
M 5	Geraden, Ebenen, Kugeln II

Erklärung zu den Symbolen



leichtes Niveau



mittleres Niveau



schwieriges Niveau

Kugeln, Dreieck und Punkte

M 1

1. Kugeln und Dreieck

In einem rechtwinkligen Koordinatensystem sind die Punkte $P\left(8 \mid -4 \mid \frac{21}{2}\right)$,

$Q(-2 \mid -4 \mid 18)$ und $M(-2 \mid -4 \mid 3)$ sowie die Gerade $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ -10 \\ 18 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$

gegeben.

- Zeigen Sie, dass das Dreieck MPQ gleichschenkelig ist und dass die Geraden g und $h = MP$ windschief sind.
- Die Kugel K mit dem Mittelpunkt M berührt die Gerade g . Bestimmen Sie den Radius r der Kugel sowie die Koordinaten des Berührungspunktes B der Kugel K mit der Geraden g .
- Bestimmen Sie eine Gleichung der Tangentialebene T im Punkt B . Welche besondere Lage hat T im Koordinatensystem?
- Die Kugel K' hat den Mittelpunkt $M'(18 \mid -4 \mid 18)$ und den Radius $r' = 20$ LE. Zeigen Sie, dass der Punkt Q auf dem Schnittkreis der Kugeln K und K' liegt. Bestimmen Sie dann eine Gleichung der Schnitkreisebene E sowie Mittelpunkt R und Radius r des Schnittkreises k der Kugeln K und K' .

2. Kugeln und Punkte

In einem rechtwinkligen Koordinatensystem sind gegeben:

- die vier Punkte $A(-1 \mid 9 \mid 8)$, $B(1 \mid 10 \mid 10)$, $C(-5 \mid 5 \mid 8)$ und $D(1 \mid 2 \mid 6)$
- die Ebene $E: 2x_1 - x_2 - 2x_3 - 27 = 0$
- die Kugel $K: x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 6x_1 - 2x_2 + 4x_3 - 86 = 0$.

- Bestimmen Sie den Flächeninhalt des Dreiecks ABC sowie eine Gleichung der Ebene E' durch die Punkte A , B , C .
- Die Gerade $g = AD$ schneidet die Ebene E' in einem Punkt S unter dem Winkel φ . Bestimmen Sie die Koordinaten von S , die Größe von φ sowie einen Punkt $P \in g$, der von der Ebene E' den Abstand 3 LE besitzt.
- Die Ebene E schneidet die Kugel K in einem Kreis k . Berechnen Sie die Koordinaten des Mittelpunktes R sowie den Radius r von k .

Kugeln, Ebene, Dreieck, Kreis**M 3****1. Kugeln und Kugel**

In einem rechtwinkligen Koordinatensystem sind die Punkte $A(1|-3|-2)$ und

$B(7|-1|7)$ gegeben:

- Eine Kugel K durch die Punkte A und B hat ihren Mittelpunkt M auf der x_3 -Achse. Bestimmen Sie die Koordinaten von M sowie den Radius r .
- Eine Kugel K' hat ihren Mittelpunkt M' ebenfalls auf der x_3 -Achse und die Gerade $g = AB$ als Tangente. Wo befindet sich der Mittelpunkt M' der kleinsten Kugel dieser Art?

**2. Kugel, Ebene, Dreieck**

In einem rechtwinkligen Koordinatensystem sind die Punkte $M(-4|10|-3)$ und

$A(10|-8|4)$ sowie die Ebene $E: 11x_1 - 10x_2 + 2x_3 - 30 = 0$ gegeben.

- Bestimmen Sie die Koordinaten des Schnittpunktes S und den Winkel φ zwischen der Geraden $g = AM$ und den Abstand des Punktes M von der Ebene E .
- Eine Kugel K mit dem Mittelpunkt M schneidet die Ebene E in einem Kreis k mit dem Radius $r = 9$ LE. Wie lautet die Gleichung dieser Kugel K ?
- Der Punkt $P(p|-2|6)$ ist ein Punkt der Kugel K . Bestimmen Sie eine Gleichung der Tangentialebene T in P an K sowie den Flächeninhalt des Dreiecks AMP .
- Wie groß ist der maximale Flächeninhalt eines Dreiecks AMQ , wenn der Punkt Q auf der Kugel K liegen soll?

**3. Kugel und Kreis**

In einem rechtwinkligen Koordinatensystem sind der Punkt $P(0|-3)$ sowie der Kreis

$k: x_1^2 + x_2^2 - 10x_1 - 14x_2 + 49 = 0$ gegeben.

- Bestimmen Sie Mittelpunkt M und Radius r des Kreises sowie die Gleichungen der Tangenten t_1 und t_2 , die vom Punkt P an den Kreis k gelegt werden können.
- Gesucht ist die Gleichung der Kugel K , die die Ebene $E: x_3 - 25 = 0$ berührt und die x_1x_2 -Ebene im Kreis k schneidet.



M 4 Geraden, Ebenen, Kugeln I

1. Gegeben sind die Geraden $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ -8 \\ -4 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$ und $h: \vec{x} = \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ -6 \end{pmatrix}$.

a) Zeigen Sie, dass g und h eindeutig eine Ebene E aufspannen. Bestimmen Sie eine Gleichung von E in Normalenform.

b) Die Ebene F schneidet die Ebene E in der Geraden $s: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ -5 \\ 4 \end{pmatrix} + \sigma \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ -4 \end{pmatrix}$ und enthält $S(-5|-3|-4)$. Wie lautet eine Gleichung von F in Normalenform?

c) Die Kugel K mit $r = 9$ LE und dem Mittelpunkt $M(m_1 > 0 | m_2 | m_3)$ berührt die Ebene F im Punkt S . Bestimmen Sie eine Gleichung von K .

d) Zeigen Sie, dass die Ebene E die Kugel K schneidet. Bestimmen Sie den Mittelpunkt R und den Radius r des Schnittkreises k .

e) Beweisen Sie, dass die Gerade h den Schnittkreis k schneidet. Wie lang ist die ausgeschnittene Sehne?

f) Für welchen Wert von a ist die Gerade $t: \vec{x} = \begin{pmatrix} 7 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + v \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ a \\ a \end{pmatrix}$ Tangente an K ?

2. Gegeben ist die Gerade $\ell: \vec{x} = \begin{pmatrix} 9 \\ -7 \\ 3 \end{pmatrix} + \tau \cdot \begin{pmatrix} 8 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

a) Bestimmen Sie den Schnittpunkt T und Schnittwinkel φ zwischen ℓ und E .

b) Zeigen Sie, dass die senkrechte Projektion ℓ' der Geraden ℓ auf die Ebene E durch den Punkt $R(7|1|-4)$ verläuft.

c) Der Mittelpunkt M einer Kugel K' , die die Kugel K senkrecht schneidet, liegt auf der Geraden ℓ und auf der Ebene E . Welche Gleichung hat die Kugel K' ?