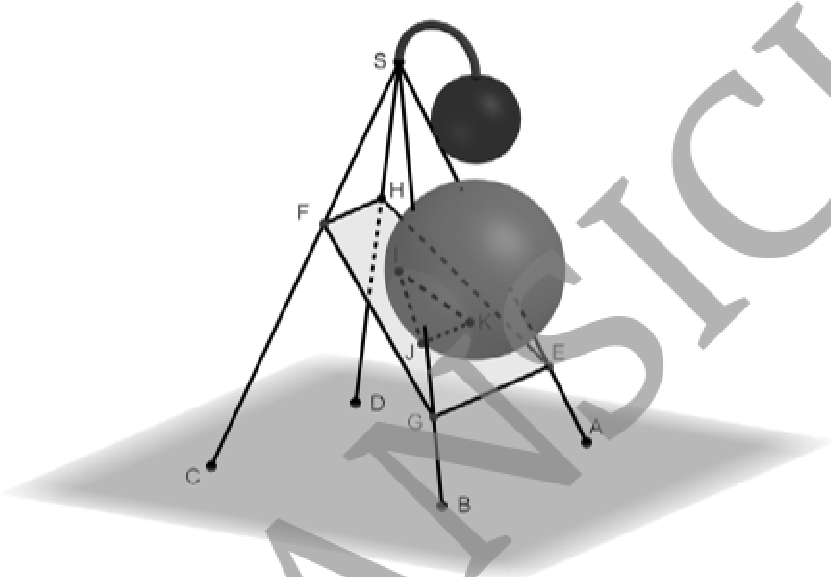
I.2.30

Flächen- und Rauminhalte – Inhaltsberechnungen

Abstrakte Skulptur mit Kugeln

Günther Weber



Grafik: Günther Weber

In einem Freizeitpark soll eine neue Figur aufgebaut werden. Diese besteht im Wesentlichen aus den Seitenkanten einer geraden quadratischen Pyramide, einer Trapezfläche, aus der ein gleichseitiges Dreieck ausgeschnitten wird und zwei Kugeln. Die Lernenden untersuchen die Figur mit den Methoden der Analytischen Geometrie, indem sie die Koordinaten von Punkten bestimmen und Winkel berechnen. Ebenso wird die Größe von Flächen berechnet.

KOMPETENZPROFIL

Klassenstufe:	10/11/12/13
Dauer:	4 – 5 Unterrichtsstunden
Kompetenzen:	Mathematisch argumentieren und beweisen, mathematische Darstellungen verwenden, mit symbolischen, formalen und technischen Elementen der Mathematik umgehen, Textkompetenz, Umgang mit Texten und Medien
Thematische Bereiche:	Computer- und Softwareeinsatz, digitale Übung, Übung
	GeoGebra-Datei, Grafik
Medien:	Ortsvektoren von Punkten, parametrisierte Form der Kreisgleichung, Teilungsverhältnis, Winkelfunktionen, Geradengleichung, Einheitsrichtungsvektoren, Schnitt von Geraden bzw. von Gerade und Ebene, Schnittwinkel von Ebenen bzw. Gerade und Ebene, Mittelpunkt einer Strecke, Abstand zweier Punkte, Punktprobe, Flächeninhalt von Dreieck, Viereck, Parallelogramm und Trapez, Prozentrechnung, Volumen Kugelsegment, Volumen Rotationskörper

Didaktisch-methodische Hinweise

Lernvoraussetzungen:

Die Lernenden kennen die Zwei-Punkteform bzw. Punkt-Richtungsform der Geradengleichung sowie die Normal- und Koordinatenform der Ebenengleichung. Eine Punktprobe oder die Bestimmung des Schnittpunktes zweier Geraden bzw. einer Geraden mit einer Ebene bereitet ihnen keine Probleme. Die Jugendlichen können mit den Methoden der analytischen Geometrie Abstandsberechnungen und Winkelberechnungen durchführen sowie Flächeninhalte von Drei- bzw. Vierecken bestimmen. Die Schülerinnen und Schüler können den Ortsvektor eines festen Punktes auf einer Gerade angeben und durch Abstandsberechnung die Koordinaten des Punktes berechnen. Die Winkelfunktionen und der Satz des Pythagoras sind bekannt. Die Lernenden können das Volumen eines Rotationskörpers bei Rotation um die x-Achse berechnen.

Lehrplanbezug

Im Kernlernplan

https://www.schulentwicklung.nrw.de/lehrplaene/lehrplan/331/gost_klp_m_2023_06_07.pdf (aufgerufen am 4.4.2025) finden sich unter anderem folgende Kompetenzerwartungen:

Die Schülerinnen und Schüler ...

- wählen geeignete kartesische Koordinatisierungen für die Bearbeitung eines geometrischen Sachverhalts in der Ebene und im Raum,
- stellen geometrische Objekte in einem räumlichen kartesischen Koordinatensystem dar,
- berechnen Längen von Vektoren und Abstände zwischen Punkten mithilfe des Satzes des Pythagoras,
- stellen Geraden und Strecken in Parameterform dar,
- interpretieren Parameter von Geradengleichungen im Sachkontext,
- untersuchen Lagebeziehungen von Geraden,
- nutzen Eigenschaften von Vektoren und Parametergleichungen von Geraden beim Lösen von innermathematischen und anwendungsbezogenen Problemstellungen,
- stellen Ebenen in Normalenform sowie in Koordinatenform dar und nutzen diese zur Orientierung im Raum,
- untersuchen Lagebeziehungen von Ebenen sowie von Geraden und Ebenen,
- berechnen Schnittpunkte von Geraden mit Ebenen,
- berechnen die Größe des Schnittwinkels zwischen zwei sich schneidenden Objekten,
- bestimmen Abstände zwischen Punkten, Geraden und Ebenen,
- untersuchen geometrische Objekte oder Situationen in innermathematischen und anwendungsbezogenen Problemstellungen und deuten die Ergebnisse

Aus den Inhalten der Mittelstufe nutzen sie den Satz des Pythagoras sowie die Kreisgleichung und berechnen Volumina bzw. Flächen.

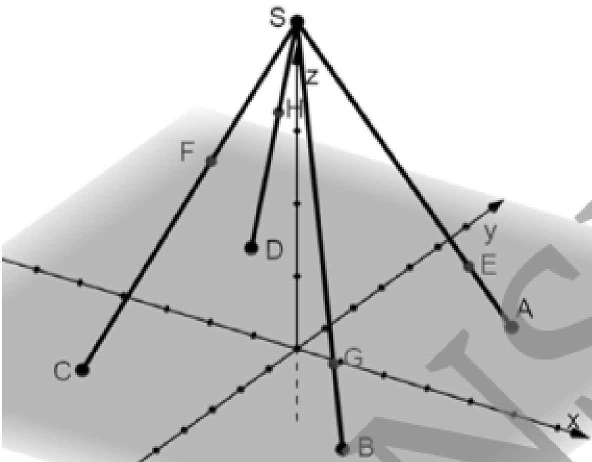
Zudem nutzen die Lernenden mathematische Hilfsmittel und digitale Werkzeuge, um Sachverhalte zu veranschaulichen bzw. Ergebnisse zu kontrollieren.

Methodisch-didaktische Anmerkungen

Wiederholen Sie vor der Bearbeitung der Aufgaben die Kugelgleichung und das Verfahren, wie mithilfe von Einheitsrichtungsvektoren der Ortsvektor eines Punktes bestimmt werden kann. Einige Aufgabenstellungen, wie die Bestimmung der Koordinaten von Punkten oder die Bestimmung des Normalenvektors einer Ebene, kommen wiederholt vor. Lassen Sie hier einige Aufgaben auch per Hand lösen, da sie auch im hilfsmittelfreien Teil des Abiturs vorkommen können. Bei einigen Aufgaben wie Aufgabe **1d)**, Aufgabe **3e)** oder Aufgabe **5)** gibt es verschiedene Lösungsmöglichkeiten. Besprechen Sie vor der Bearbeitung der Aufgaben die Möglichkeiten, teilen Sie dann die Lerngruppe auf und lassen die Lerngruppen die Aufgabe dann auf unterschiedliche Arten lösen. Nach der Lösung vergleichen Ihre Schülerinnen und Schüler dann die Lösungsmöglichkeiten hinsichtlich der Schwierigkeit des Lösungsweges bzw. hinsichtlich des Arbeitsaufwandes. Wiederholen Sie bei Aufgabe **3a)** die Eigenschaften eines Tetraeders, insbesondere dass das Lot von der Spitze die Grundfläche im Schwerpunkt trifft und dass der Schwerpunkt der Schnittpunkt der Seitenhalbierenden ist. Geben Sie, falls nicht bekannt, die Formel zur Bestimmung des Schwerpunktes an. Aufgabe **3b)** kann auch gruppenweise durch zwei Lerngruppen, jede Lerngruppe bearbeitet eine Seitenkante, gelöst werden. Bei Aufgabe **3d)** kann die Formel für das Volumen eines Kugelsegments auch von Ihnen vorgegeben werden. Weisen Sie bei Aufgabe **4c)** bei schwächeren Lerngruppen darauf hin, dass der Abstand der Kugeln auf den Abstand der Mittelpunkte zurückgeführt werden kann. Bei vielen Aufgabenstellungen kann der Sachverhalt mithilfe von GeoGebra veranschaulicht und die Lösung bestimmt bzw. die Lösung kontrolliert werden. Insbesondere bei schwächeren Lerngruppen empfiehlt sich diese Vorgehensweise.

M 1 Aufgaben

Als Grundgerüst für eine Skulptur dienen die Seitenkanten einer geraden (senkrechten) quadratischen Pyramide mit der Grundfläche in der xy-Koordinatenebene. Die Grundkanten der Pyramide verlaufen parallel zur x- bzw. y-Koordinatenachse und haben eine Länge von 1,5 m; die Höhe beträgt 2,25 m.
Verwendet wird ein Koordinatensystem, bei dem gilt: $1\,\text{LE} \triangleq 25\,\text{cm}$



Grafik: Günther Weber

1.

a) Bestimmen Sie die Koordinaten der Spitze $S(x_s \mid y_s \mid z_s > 0)$ sowie die Koordinaten der Eckpunkte A, B, C und D der Pyramide, wenn das Lot von der Spitze S der Pyramide die Grundfläche im Ursprung trifft.

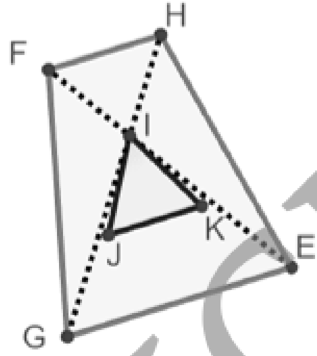
b) Zeigen Sie rechnerisch, dass der Punkt $E(2{,}4 \mid 2{,}4 \mid 1{,}8)$ auf der Seitenkante $\overline{AS}$ und der Punkt $F(-1{,}2 \mid -1{,}2 \mid 5{,}4)$ auf der Kante $\overline{CS}$ liegt.

c) Bestimmen Sie das Teilungsverhältnis, in dem die Punkte E bzw. F die Seitenkanten teilen.
Zur Differenzierung: Bestimmen Sie ohne Berechnung der Vektoren das Teilungsverhältnis, in dem die Punkte E bzw. F die Seitenkanten teilen.

d) Eine Parallele zur Grundkante $\overline{AB}$ durch den Punkt E schneidet die Kante $\overline{BS}$ im Punkt G, eine Parallele zur Grundkante $\overline{CD}$ durch den Punkt F schneidet die Kante $\overline{DS}$ im Punkt H. Bestimmen Sie die Koordinaten der Punkte G und H.

2.

Die Punkte auf den Seitenkanten sollen durch Streben verbunden werden, sodass eine Viereckfläche GEHF entsteht.



Grafik: Günther Weber

a) Zeigen Sie, dass das Viereck GEHF ein gleichschenkliges (symmetrisches) Trapez ist und berechnen Sie den Flächeninhalt des Trapezes.

b) Bestimmen Sie den Winkel der Trapezfläche gegen die Grundfläche und den Winkel der Seitenkante $\overline{BS}$ gegen die Trapezfläche.

c) Die Diagonalen des Trapezes schneiden sich in einem Punkt I. Bestimmen Sie die Koordinaten des Schnittpunktes I.

d) Zeigen Sie, dass der Punkt I auf der Symmetrieachse des Trapezes liegt.

e) Aus der Trapezfläche soll ein gleichseitiges Dreieck mit der Seitenlänge 2 LE geschnitten werden. Ein Eckpunkt des Dreiecks ist der Schnittpunkt der beiden Diagonalen des Trapezes, und die dem Punkt I gegenüberliegende Dreieckseite verläuft parallel zur Seite $\overline{GE}$ des Trapezes. Bestimmen Sie die Koordinaten der beiden anderen Punkt J und K des gleichseitigen Dreiecks. Zur Kontrolle:

$$K\left(\frac{\sqrt{6}}{2}\,\middle|\,1\,\middle|\,\frac{21}{5}-\frac{\sqrt{6}}{2}\right)\approx(1{,}22|1|2{,}98),$$

$$J\left(\frac{\sqrt{6}}{2}\,\middle|\,-1\,\middle|\,\frac{21}{5}-\frac{\sqrt{6}}{2}\right)\approx(1{,}22|-1|2{,}98)$$