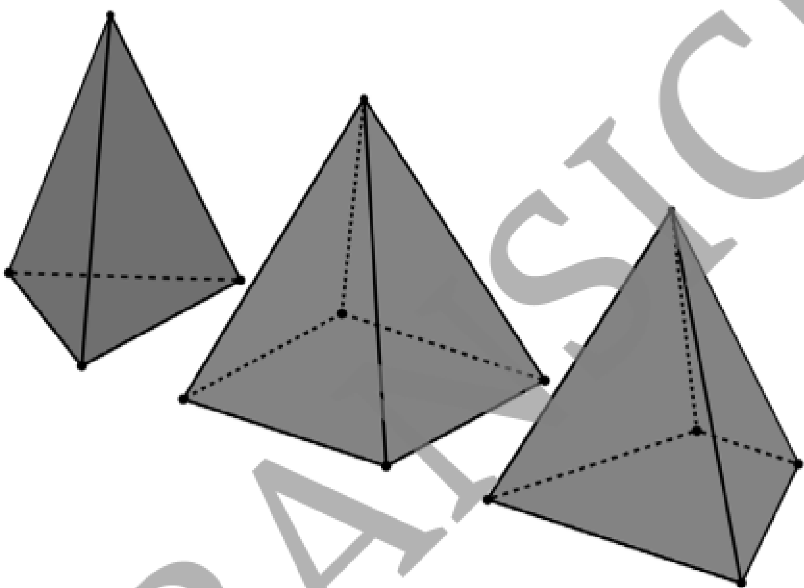
Flächen- und Rauminhalte – Inhaltsberechnungen

Dreieck, Quadrat und Trapez als Grundfläche einer Pyramide – Aufgaben aus Analytischer Geometrie

Alfred Müller



Grafik: Günter Gerstbrein

Zwei Übungsblätter bieten Ihrer Klasse eine Reihe von Aufgaben aus dem Bereich der Analytischen Geometrie. Die Jugendlichen arbeiten im dreidimensionalen Raum und beschreiben mittels gegebener Punkte drei- und vierseitige Pyramiden. Zum Einsatz kommen dabei Geraden- und Ebenengleichungen. Im Laufe der Aufgaben bestimmen die Lernenden Schnittpunkte, Schnittgeraden und Schnittwinkel, aber auch Volumen und Oberfläche der gegebenen Pyramiden.

KOMPETENZPROFIL

Klassenstufe:	10/11/12/13
Kompetenzen:	Analysekompetenz, mathematisch argumentieren und beweisen, mathematische Darstellungen verwenden, mit mathematischen Objekten umgehen, Problemlösekompetenz
Methoden:	Analyse, Diskussion, Übung
Materialtyp	Arbeitsblatt, Differenzierungsmaterial, Textimpuls
Thematische Bereiche:	Pyramide, Quadrat, Trapez, Punkte, Geraden, Ebene, Hesse-Form, Schnittpunkt, Schnittgerade, Schnittwinkel, Fläche, Volumen

Fachliche Hinweise

Die Lernenden können mit Geraden und Ebenen umgehen. Sie berechnen Abstände, Schnittpunkte, Schnittgeraden und Schnittwinkel. Auch die Pyramide als geometrisches Objekt ist ihnen zur Berechnung von Volumina und Oberflächen geläufig.

Auf einen Blick

Schwerpunkt, Schnittpunkt, Abstand – Übungsaufgaben mit Ebenen und Geraden

M 1	Quadratische Pyramide
M 2	Dreieck, Trapez und Pyramide

Erklärung zu den Symbolen

Dieses Symbol markiert differenziertes Material. Wenn nicht anders ausgewiesen, befinden sich die Materialien auf mittlerem Niveau.

leichtes Niveau	mittleres Niveau	schwieriges Niveau

Quadratische Pyramiden

M 1

1. In einem rechtwinkligen Koordinatensystem sind die beide parallelen Geraden p und q sowie eine dritte Gerade g gegeben. Es gilt:

$$p:\vec{x}=\begin{pmatrix}3\\-2\\3\end{pmatrix}+\lambda\cdot\begin{pmatrix}2\\2\\1\end{pmatrix};\quad q:\vec{x}=\begin{pmatrix}5\\6\\1\end{pmatrix}+\mu\cdot\begin{pmatrix}2\\2\\1\end{pmatrix};\quad g:\vec{x}=\begin{pmatrix}2\\1\\7\end{pmatrix}+\sigma\cdot\begin{pmatrix}-3\\1\\0\end{pmatrix}.$$

   a) Bestimmen Sie den Abstand d der beiden parallelen Geraden p und q sowie den Winkel φ, unter dem die Gerade g, die von p und q aufgespannte Ebene schneidet.

   b) Eine gerade quadratische Pyramide hat ihre Spitze S auf der Geraden g, je zwei benachbarte Ecken liegen auf p bzw. q. Welche Koordinaten hat der Punkt S?

   c) Welche Koordinaten haben die Eckpunkte P_1, P_2, P_3, P_4 der Grundfläche der Pyramide?

2. Von einem Quadrat ABCD kennt man die Ecken $A(1|1|1)$ und $B(5|5|3)$. Die Ecke D hat die x_1-Koordinate $x_1=-1$.

   a) Bestimmen Sie die weiteren ganzzahligen Koordinaten von D und dann die Koordinaten der Ecke C.

   b) Das Quadrat ABCD ist die Grundfläche einer geraden quadratischen Pyramide mit dem Volumen V = 72 VE. Wie lauten die Koordinaten der Spitze S dieser Pyramide?

3. In einem rechtwinkligen Koordinatensystem schließen die Vektoren

$$\vec{p}=\begin{pmatrix}p_1\\p_2\\p_3\end{pmatrix} \text{ und } \vec{q}=\begin{pmatrix}2\\2\\-1\end{pmatrix}$$ einen rechten Winkel ein. Der Vektor $\vec{p}$ hat die Länge $|\vec{p}|=15$ LE. Ferner weiß man für den Vektor $\vec{p}: p_1+5p_3=0 \wedge p_1\geq 0$.

   a) Bestimmen Sie die Komponenten des Vektors $\vec{p}$.

   b) Mit den Vektoren $\overrightarrow{AB}=\vec{p}$ und $\overrightarrow{AD}=k\cdot\vec{q}, k>0$ wird vom Punkt $A(-2|1|7)$ aus ein Quadrat ABCD aufgespannt. Bestimmen Sie k sowie die Koordinaten der noch fehlenden Eckpunkte B, C und D dieses Quadrats.

   c) Bestimmen Sie eine Koordinatengleichung der Grundflächenebene ABCD.

   d) Der Ursprung O (0 | 0 | 0) ist die Spitze einer Pyramide mit der Grundfläche ABCD. Wie groß ist das Volumen der Pyramide und wie groß ist der Winkel α, den die Seitenkante [AO] mit der Grundfläche ABCD bildet.