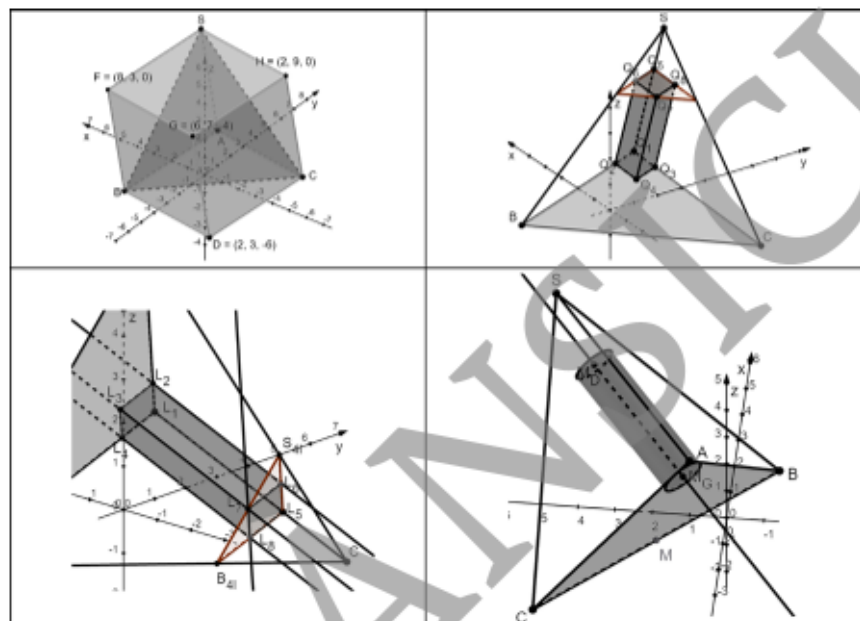


I.2.33

Flächen- und Rauminhalte – Inhaltsberechnungen

Dreiseitige Pyramide mit Quadern und Zylindern

Günther Weber



Es wird gezeigt, dass sich eine vorgegebene Dreieckspyramide zu einem Würfel ergänzen lässt. In diese Pyramide soll eine quadratische Säule bzw. ein Zylinder mit vorgegebener Höhe so eingebettet werden, dass die quadratische Säule bzw. der Zylinder maximales Volumen hat. Extremwertaufgaben schlagen einen Bogen von der analytischen Geometrie zur Analysis, wenn die Lernenden untersuchen, bei welcher Höhe h die quadratische Säule bzw. der Zylinder sein maximales Volumen annimmt bzw. bei welcher Höhe das Volumen am stärksten abnimmt. Zu einer vorgegebenen Grundfläche der Dreieckspyramide und den Maßen einer eingebetteten quadratischen Säule mit maximalen Volumen wird die Spitze der Pyramide bestimmt.

KOMPETENZPROFIL

Klassenstufe:	10/11/12/13
Dauer:	3 – 4 Unterrichtsstunden
Kompetenzen:	Mathematisch argumentieren und beweisen, mathematische Darstellungen verwenden, mit symbolischen, formalen und technischen Elementen der Mathematik umgehen, Textkompetenz, Umgang mit Texten und Medien
Methoden:	Computer- und Softwareeinsatz, digitale Übung, Übung
Materialart:	GeoGebra-Datei, Grafik
Inhalt:	Ortsvektoren von Punkten, Geradengleichung, Einheitsrichtungsvektoren, Schnitt von Geraden bzw. von Gerade und Ebene, Mittelpunkt einer Strecke, Winkelhalbierende im Raum, Inkreismittelpunkt, zentrische Streckung, Abstand zweier Punkte, Volumen Quader, Volumen Zylinder, Maximum, Minimum,

Didaktisch-methodische Hinweise

Lernvoraussetzungen:

Die Lernenden kennen die Zwei-Punkteform bzw. die Punkt-Richtungsform der Geradengleichung sowie die Normal- und Koordinatenform der Ebenengleichung. Die Bestimmung des Schnittpunktes zweier Geraden bzw. einer Geraden mit einer Ebene bereitet ihnen keine Probleme. Die Jugendlichen kennen die geometrische Bedeutung des Skalarprodukts; sie können mithilfe des Skalarprodukts einen Normalenvektor bestimmen und mit diesem die Gleichung einer Lotgeraden aufstellen. Die Bestimmung des Ortsvektors eines Punktes mithilfe von Einheitsrichtungsvektoren bereitet ihnen keine Schwierigkeit. Die Lernenden kennen die Eigenschaften des Quadrates und die Formel zur Bestimmung des Winkels zwischen zwei Vektoren. Das Verfahren zur Aufstellung einer Zielfunktion bei einem Extremwertproblem ist bekannt und kann mithilfe einer Funktionsuntersuchung gelöst werden.

Lehrplanbezug

Im Kernlernplan

https://www.schulentwicklung.nrw.de/lehrplaene/lehrplan/331/gost_klp_m_2023_06_07.pdf

(aufgerufen am 14.9.2025) finden sich unter anderem folgende Kompetenzerwartungen

Die Schülerinnen und Schüler ...

- stellen geometrische Objekte in einem räumlichen kartesischen Koordinatensystem dar,
- stellen Geraden und Strecken in Parameterform dar,
- untersuchen Lagebeziehungen von Geraden,
- nutzen Eigenschaften von Vektoren und Parametergleichungen von Geraden beim Lösen von innermathematischen und anwendungsbezogenen Problemstellungen,
- stellen Ebenen in Normalenform sowie in Koordinatenform dar und nutzen diese zur Orientierung im Raum,
- untersuchen Lagebeziehungen von Ebenen sowie von Geraden und Ebenen,
- berechnen Schnittpunkte von Geraden mit Ebenen,
- bestimmen Abstände zwischen Punkten, Geraden und Ebenen,
- untersuchen geometrische Objekte oder Situationen in innermathematischen und anwendungsbezogenen Problemstellungen und deuten die Ergebnisse

Aus den Inhalten der Mittelstufe nutzen sie die Strahlensätze und berechnen Volumina bzw. Flächen.

Zudem nutzen die Lernenden mathematische Hilfsmittel und digitale Werkzeuge, um Sachverhalte zu veranschaulichen bzw. Ergebnisse zu kontrollieren.

Methodisch-didaktische Anmerkungen

Einige Aufgabenstellungen wie die Bestimmung der Koordinaten von Punkten oder die Bestimmung des Normalenvektors einer Ebene kommen wiederholt vor. Lassen Sie hier einige Aufgaben auch per Hand lösen, da sie auch im hilfsmittelfreien Teil des Abiturs vorkommen können. Wiederholen Sie vor der Bearbeitung von **Aufgabe 2)**, wie der Ortsvektor eines Punktes, der von einem anderen Punkt eine feste Länge hat, mithilfe von Einheitsrichtungsvektoren bestimmt werden kann. Weisen Sie die Lernenden darauf hin, dass die Grundfläche der quadratischen Säule an der Kante $\overline{AS}$ anliegt. **Aufgabe 2a)** und **2b)** können arbeitsteilig durch zwei Gruppen bearbeitet werden. Gleiches gilt für die **Aufgaben 5)** und **6)**. Wiederholen Sie bei **Aufgabe 3)**, dass der Inkreismittelpunkt der Schnittpunkt der Winkelhalbierenden ist. Wird nicht mit dem TI gearbeitet, so klären Sie evtl. unbekannte Taschenrechnerbefehle im

Aufgaben

Gegeben sind die Punkte $A(0|1|2)$, $B(4|-1|-2)$, $C(-2|5|-2)$ und $S(4|5|4)$.

1.

- Zeigen Sie, dass das Dreieck ABC rechtwinklig-gleichschenkelig ist.
- Begründen Sie, dass die Pyramide ABCS zu einem Würfel erweitert werden kann, und geben Sie die Eckpunkte des Würfels an.

2. In die Pyramide soll ein Quader mit quadratischer Grundfläche und der Höhe $h=4$ LE so eingebettet werden, dass der Quader ein möglichst großes Volumen hat. Die quadratische Grundfläche des Quaders liegt

- in der Grundfläche ABC der Pyramide mit einem Eckpunkt im Punkt A.
- in der Mantelfläche ASB der Pyramide mit einem Eckpunkt im Punkt A. Berechnen Sie jeweils das Volumen des eingebetteten Quaders und bestimmen Sie die Eckpunkte.

3. Der Inkreismittelpunkt I eines Dreiecks ist der Schnittpunkt der Winkelhalbierenden des Dreiecks. Zur Bestimmung des Inkreismittelpunktes des Dreiecks ABC sowie des Radius wird die im nebenstehenden Screenshot dargestellte Rechnung durchgeführt.

- Erklären Sie den Rechenweg.

$$m_{bc} = \frac{1}{2} \cdot (b+c) \quad \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{bmatrix}$$

$$i_z = a + r_f \cdot (m_{bc} - a) \quad \begin{bmatrix} r_f \\ r_f + 1 \\ 2 - 4 \cdot r_f \end{bmatrix}$$

$$\text{solve}\left(\cos(22.5) = \frac{\text{dot}(a-b, i-b)}{\text{norm}(a-b) \cdot \text{norm}(i-b)}, r_f\right)$$

$$r_f = -\sqrt{2} \text{ or } r_f = 2 - \sqrt{2}$$

$$i_k; i_j; r_f = 2 - \sqrt{2} \quad \begin{bmatrix} 2 - \sqrt{2} \\ 3 - \sqrt{2} \\ 4 \cdot \sqrt{2} - 6 \end{bmatrix}$$

$$i_k; i_j; r_f = 2 - \sqrt{2} \quad \begin{bmatrix} 2 - \sqrt{2} \\ 3 - \sqrt{2} \\ 4 \cdot \sqrt{2} - 6 \end{bmatrix}$$

$$\text{norm}(m_{bc} - i_k) \quad 6 - 3 \cdot \sqrt{2}$$