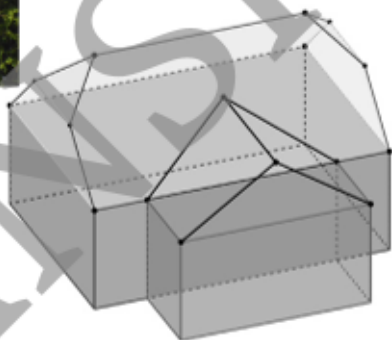


R.3.41

Anwendungsaufgaben – Längen, Winkel und Abstände

Modellierung eines zweiteiligen Vogelfutterhauses mit verschiedenen Dachformen

Günther Weber



Günther Weber © RAABE

Aus einigen vorgegebenen Eckpunkten und Längen wird das 3D-Modell eines Häuschens, das aus einem Hauptgebäude mit Krüppelwalmdach und einem Anbau mit Satteldach besteht, entworfen. Hierzu werden mit den Methoden der Analytischen Geometrie die anderen Eckpunkte bestimmt sowie die Längen von Strecken, die Gleichung von Gebäudeflächen und Winkel zwischen den Flächen bzw. zwischen Flächen und Kanten beim Gebäude berechnet. Ebenso wird der umbaute Raum beim Dachgeschoss des Hauptgebäudes berechnet. Eine Kontrolle der Ergebnisse kann darin bestehen, dass das Vogelfutterhaus nachgebaut wird.

KOMPETENZPROFIL

Klassenstufe:	10/11/12/13
Dauer:	3,5 – 4,5 Unterrichtsstunden (ohne Basteln)
Kompetenzen:	Mathematisch argumentieren und beweisen, mathematische Darstellungen verwenden, mit symbolischen, formalen und technischen Elementen der Mathematik umgehen, Textkompetenz
Methoden:	Computer- und Softwareeinsatz, digitale Übung, Übung
Materialart:	GeoGebra-Datei, Grafik
Inhalt:	Ortsvektoren von Punkten, Geradengleichung, Einheitsrichtungsvektoren, Schnitt von Gerade und Ebene, Mittelpunkt einer Strecke, Abstand zweier Punkte, Fläche Dreieck bzw. Trapez, Volumen Prisma bzw. Pyramide, Bestimmung Parabelgleichung, bestimmtes Integral

Didaktisch-methodische Hinweise

Lernvoraussetzungen:

Die Lernenden kennen die Zwei-Punkteform bzw. Punkt-Richtungsform der Geradengleichung sowie die Normal- und Koordinatenform der Ebenengleichung. Die Bestimmung des Schnittpunktes einer Geraden mit einer Ebene bereitet ihnen keine Probleme. Die Jugendlichen kennen die geometrische Bedeutung des Skalarprodukts; sie können mithilfe des Skalarprodukts einen Normalenvektor bestimmen und mit diesem die Gleichung einer Lotgeraden bzw. die Koordinatenform einer Ebenengleichung aufstellen. Die Bestimmung des Ortsvektors eines Punktes mithilfe von Einheitsrichtungsvektoren bereitet ihnen keine Schwierigkeit. Die Lernenden kennen die Formel zur Bestimmung des Winkels zwischen zwei Vektoren (zwischen Ebene und Gerade; zwischen zwei Ebenen). Das Verfahren zur Aufstellung einer Zielfunktion bei einem Extremwertproblem ist bekannt. Die Lernenden können aus vorgegebenen Punkten die Gleichung einer Parabel aufstellen und über die Parabel integrieren.

Lehrplanbezug

Im Kernlernplan

https://lehrplannavigator.nrw.de/system/files/media/document/file/gost_klp_m_2023_06_07.pdf

(aufgerufen am 30.11.2025) finden sich unter anderem folgende Kompetenzerwartungen

Die Schülerinnen und Schüler ...

- wählen geeignete kartesische Koordinatisierungen für die Bearbeitung eines geometrischen Sachverhalts in der Ebene und im Raum,
- stellen geometrische Objekte in einem räumlichen kartesischen Koordinatensystem dar,
- stellen Geraden und Strecken in Parameterform dar,
- interpretieren Parameter von Geradengleichungen im Sachkontext,
- untersuchen Lagebeziehungen von Geraden,
- untersuchen geometrische Situationen im Raum mithilfe digitaler Mathematikwerkzeuge,
- nutzen Eigenschaften von Vektoren und Parametergleichungen von Geraden beim Lösen von innermathematischen und anwendungsbezogenen Problemstellungen,
- lösen lineare Gleichungssysteme im Zusammenhang von Lagebeziehungen von Geraden und interpretieren die jeweilige Lösungsmenge
- deuten das Skalarprodukt geometrisch (Orthogonalität, Betrag, Winkel zwischen Vektoren) und berechnen es,
- stellen Ebenen in Normalenform sowie in Koordinatenform dar und nutzen diese zur Orientierung im Raum,
- berechnen Schnittpunkte von Geraden mit Ebenen,
- erläutern ein algorithmisches Lösungsverfahren für lineare Gleichungssysteme,
- wenden ein algorithmisches Lösungsverfahren ohne digitale Mathematikwerkzeuge auf Gleichungssysteme mit maximal drei Unbekannten an, die mit geringem Rechenaufwand lösbar sind,
- berechnen die Größe des Schnittwinkels zwischen zwei sich schneidenden Objekten,
- bestimmen Abstände zwischen Punkten, Geraden und Ebenen,
- führen Spiegelungen an Ebenen durch,
- untersuchen geometrische Objekte oder Situationen in innermathematischen und anwendungsbezogenen Problemstellungen und deuten die Ergebnisse.

Aus dem Bereich der Analysis wird das Aufstellen einer Parabelgleichung sowie ein Extremwertproblem angesprochen. Aus den Inhalten der Mittelstufe nutzen sie die Winkelfunktionen und berechnen Volumina von Körpern bzw. den Flächeninhalt von Flächen.

Zudem nutzen die Lernenden mathematische Hilfsmittel und digitale Werkzeuge, um Sachverhalte zu veranschaulichen bzw. Ergebnisse zu kontrollieren.

Methodisch-didaktische Anmerkungen

Klären Sie vor der Bearbeitung der Aufgaben einige Begriffe beim Dach; dies kann z. B. durch Aufruf der Internetseite <https://www.solarprofis.net/intern/begriffserklaerung-dach/> geschehen (aufgerufen am 21.05.2026).

Geben Sie vor der Bearbeitung von **Aufgabe 1f)** den Hinweis, dass mit dem umbauten Raum das Volumen gemeint ist und dass es günstig ist, den Dachkörper günstig zu erweitern. Einige Aufgabenstellungen wie die Bestimmung der Koordinaten von Punkten oder die Bestimmung des Normalenvektors einer Ebene kommen wiederholt vor. Lassen Sie hier einige Aufgaben auch per Hand lösen, da sie auch im hilfsmittelfreien Teil des Abiturs vorkommen können. Wiederholen Sie vor der Bearbeitung von **Aufgabe 2a)**, wie der Ortsvektor eines Punktes, der von einem anderen Punkt eine feste Länge hat, mithilfe von Einheitsrichtungsvektoren bestimmt werden kann. Einige Aufgaben wie die Berechnung von Winkeln oder die Bestimmung von Punkten können auf mehrere Arten gelöst werden. Besprechen Sie die Lösungsmöglichkeiten, teilen Sie die Lerngruppe auf. Die Aufgabe wird dann auf unterschiedlichen Lösungswegen gelöst und die Wege verglichen.

Bei vielen Aufgabenstellungen kann der Sachverhalt mithilfe von GeoGebra veranschaulicht und die Lösung bestimmt bzw. die Lösung kontrolliert werden. Insbesondere bei schwächeren Lerngruppen empfiehlt sich diese Vorgehensweise.

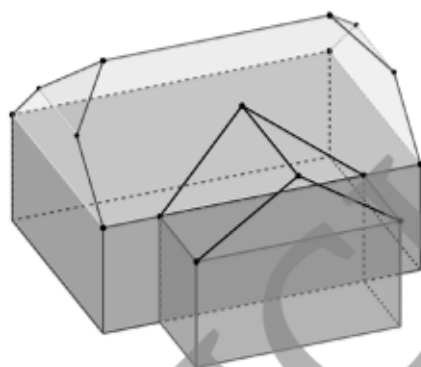
Als Hilfe beim Basteln kann den Schülerinnen und Schülern die GeoGebra-Datei „abmessungen.ggb“ zur Verfügung gestellt werden.

Soll das Vogelfutterhaus aus Holz gebastelt werden, so ist, insbesondere beim Schneiden der Gehrungen, das passende Werkzeug notwendig. Nimmt man als Baumaterial Hartschaum, so kann der Zuschnitt mit einem Cutter erfolgen. Eine einfache Kontrolle der berechneten Größen ist auch möglich, indem das Vogelfutterhaus aus Pappe gebastelt wird. Hier sind dann an den entsprechenden Flächen Klebekanten anzubringen.

M 1 Aufgaben

Lisa plant den Bau eines Vogelfutterhauses, das im Aufbau ihrem Elternhaus ähneln soll. Das Elternhaus besteht aus einem Gebäude mit Krüppelwalmdach und einem Anbau, dessen Dach ein Satteldach ist, das in das Walmdach hineinragt. Die Geschosse unterhalb des Daches haben Quaderform und haben eine Höhe von 5 Meter.

Da die Form der Dachflächen etwas „komplizierter“ ist, fertigt sie vorher mit einem Geometrieprogramm ein 3D-Modell des Daches an (1 LE im Modell $\hat{=}$ 1 m).



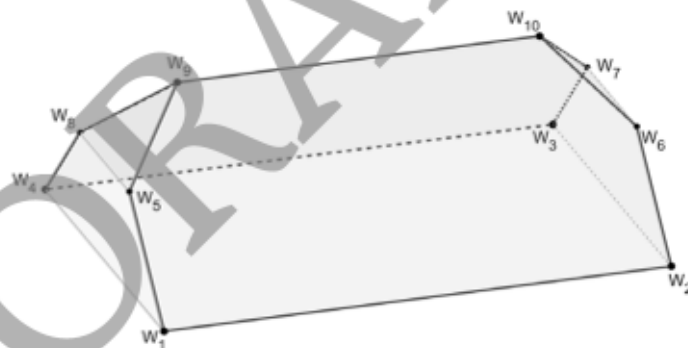
Günther Weber © RAABE

1. Das Krüppelwalmdach besteht aus zwei Hauptflächen und zwei Walmlflächen.

Es ist symmetrisch zu einer Ebene E_1 , die senkrecht zur Strecke $\overline{W_1W_2}$ durch den Mittelpunkt dieser Strecke und einer Ebene E_2 , die senkrecht zur Strecke $\overline{W_2W_3}$ durch den Mittelpunkt dieser Strecke verläuft.

Als Koordinaten für das Krüppelwalmdach legt Lisa die Koordinaten folgender Punkte fest: $W_1(0|0|0)$, $W_2(11,2|8,4|0)$, $W_3(5,2|16,4|0)$,

$$W_5\left(-\frac{7}{4} \mid \frac{7}{3} \mid \frac{14}{5}\right) \approx (-1,75 \mid 2,33 \mid 2,8) \text{ und } W_9(-1,4 \mid 5,2 \mid 4,8).$$



Günther Weber © RAABE