

1.74

Zahlen und Größen

Vielfache, Teiler und Primfaktoren – Besondere Eigenschaften natürlicher Zahlen

Alessandro Totaro



© Zuberka/Stock/Getty Images Plus

Der Umgang mit natürlichen Zahlen ist eine wichtige Basiskompetenz für Lernende. Unter anderem ist es wichtig, dass sie den Begriff „Primzahlen“ verstehen und die Teilbarkeitsregeln anwenden können, um auch bei großen Zahlen die Teilbarkeit einzuschätzen. Diese Einheit ermöglicht es den Lernenden, die dafür notwendigen Regeln zu verstehen und zu verinnerlichen, indem sie diese in den Übungsphasen durch unterschiedliche Übungsformen wie Einzelarbeit, spielerische Übungen, Tandemarbeit oder den Einbezug von *LearningApps* trainieren und anwenden.

KOMPETENZPROFIL



Klassenstufe:	5/6
Dauer:	10 Unterrichtsstunden (Minimalplan 4)
Inhalt:	Vielfache, Teiler, Vielfachenmenge, Teilermenge, Teilbarkeitsregeln, Endziffernregeln, Quersummenregel, Primfaktoren, Primfaktorzerlegung
Kompetenzen:	mit symbolischen, formalen und technischen Elementen der Mathematik umgehen (K5), mathematisch kommunizieren (K6)

Auf einen Blick

Ab = Arbeitsblatt; Sp = Spiel; Pa = Partnerarbeit, Lek = Lernerfolgskontrolle
Planung für 10 Stunden

Einstieg

Thema:	Grundwissen zu den Themen Vielfache, Teiler und Primzahlen
M 1 (Ab)	Basisaufgaben – Vielfache bestimmen
M 2 (Ab)	Basisaufgaben – Teiler bestimmen
M 3 (Ab)	Sieb des Eratosthenes – Finde die Primzahlen

Übung zu Teilbarkeitsregeln

Thema:	Grundaufgaben zu Teilbarkeitsregeln
M 4 (Sp)	Memory – Finde die passenden Paare
M 5 (Pa)	Tandembogen – Verstehst du die Teilbarkeitsregeln?
M 6 (Ab)	Zahlen unter der Lupe I – Endziffernregel anwenden
M 7 (Ab)	Zahlen unter der Lupe II – Quersummenregel anwenden

Gemischte Übungen

Thema:	Gemischte Übungen zu Primfaktoren und Teilbarkeitsregeln
M 8 (Pa)	Gemeinsam sind wir stark – Primfaktorzerlegung bestimmen
M 9 (Ab)	Exkurs – Die mathematische Zauberei mit der Quersummenregel
M 10 (Ab)	Gemischte Übungen – differenzierte Aufgabenfelder

Überprüfung des Lernerfolgs

Thema:	Lernerfolgskontrolle – wie gut ist das Thema verstanden?
M 11 (Lek)	Fit für den Test? – Übungen zum gesamten Themenbereich

Lösungen

Die **Lösungen** zu den Materialien finden Sie ab Seite 20.



Minimalplan

Die Zeit ist knapp? Dann planen Sie die Unterrichtseinheit für vier Stunden mit den folgenden Materialien:

Thema: Grundwissen zu den Themen Vielfache, Teiler und Primzahlen

M 1 (Ab) Basisaufgaben – Vielfache bestimmen

M 2 (Ab) Basisaufgaben – Teiler bestimmen

M 8 (Pa) Gemeinsam sind wir stark – Primfaktorzerlegung bestimmen

M 10 (Ab) Gemischte Übungen – differenzierte Aufgabenfelder



Erklärung zu den Symbolen

 Dieses Symbol markiert differenziertes Material. Wenn nicht anders ausgewiesen, befinden sich die Materialien auf mittlerem Niveau.		
 einfaches Niveau	 mittleres Niveau	 schwieriges Niveau
 LearningApps	 Alternative	 Selbsteinschätzung

M 1

Basisaufgaben – Vielfachenmenge bestimmen



So geht's

Löse die folgenden Aufgaben in Einzelarbeit.

Überprüfe danach deine Rechnung, indem du sie mit der Musterlösung vergleichst.

Vielfachenmenge
Die Vielfachenmenge wird wie folgt dargestellt:
$V_7 = \{7, 14, 21, 28, 35, 42, 49, 56, 63, 70, \dots\}$

Aufgabe 1

Bestimme jeweils die Vielfachenmenge mit 10 Zahlen.

- a) $V_5 =$ _____
- b) $V_9 =$ _____
- c) $V_{11} =$ _____
- d) $V_8 =$ _____
- e) $V_{12} =$ _____
- f) $V_{17} =$ _____
- g) $V_{31} =$ _____

Aufgabe 2

Finde jeweils die Fehler und korrigiere sie.

a) $V_{22} = \{22, 44, 66, 88, 100, 122, 144, 166, 188, 210, \dots\}$

b) $V_{13} = \{13, 26, 39, 52, 65, 78, 91, 114, 127, 140, \dots\}$

Aufgabe 3

Bestimme, welche Vielfachen hier dargestellt werden.

a) $V = \{\dots, 50, 75, 100, 125, 150, 175, \dots\}$

b) $V = \{\dots, 34, 51, 68, 85, 102, 119, \dots\}$

Basisaufgaben – Teiler bestimmen

M 2

So geht's

Löse die folgenden Aufgaben in Einzelarbeit.

Überprüfe danach deine Rechnung, indem du sie mit der Musterlösung vergleichst.



Teilmengen	
Die Teilermenge wird wie folgt dargestellt:	
$T_{12} = \{1, 2, 3, 4, 6, 12\}$	12
	$1 \cdot 12$
	$2 \cdot 6$
	$3 \cdot 4$

Aufgabe 1

Bestimme jeweils die Teilermenge mithilfe der möglichen Produkte.

a)	20
$T_{20} =$ _____	

b)	32
$T_{32} =$ _____	

Aufgabe 2

Bestimme jeweils die Teilermenge. Primzahlen sind nur durch sich selbst und durch 1 teilbar. Welche der Zahlen sind Primzahlen? Woran erkennt man es? Erläutere.

a) $T_{13} =$ _____

b) $T_{24} =$ _____

c) $T_8 =$ _____

d) $T_7 =$ _____

M 3

Sieb des Eratosthenes – Finde die Primzahlen



So geht's

Lies dir die Infos zur Strategie von Eratosthenes durch.

Folge danach seinen Anweisungen und **bearbeite** die Tabelle.

Sieb des Eratosthenes

Eratosthenes war ein Mathematiker, der von ca. 273 v. Chr. bis 194 v. Chr. u. a. in Alexandria lebte. Er war ein außergewöhnlich vielseitiger griechischer Gelehrter und hat die Primzahlen näher untersucht. Hier lernst du seine Sieb-Methode kennen, um Primzahlen in einem vorgegebenen Zahlenbereich schnell und einfach zu finden.



Grafik: Julia Lenzmann

Aufgabe

1. **Streiche** alle Vielfachen von 2 **durch** (außer die 2 selbst)!
2. **Streiche** alle Vielfachen von 3 **durch** (außer die 3 selbst)!
3. **Streiche** alle Vielfachen von 5 **durch** (außer die 5 selbst)!
4. **Streiche** alle Vielfachen von 7 **durch** (außer die 7 selbst)!

	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50

- b) **Kreise** nun alle übrig gebliebenen Zahlen **ein**. **Notiere** sie hier.

- c) Was fällt dir auf? **Beschreibe** deine Beobachtung.

Memory – Finde die passenden Paare



M 4

So geht's

1. **Schneidet** die Karten aus.
2. **Spielt** nun nach den klassischen Memoryspielregeln und **findet** die passenden Paare:
Welche Formel passt zu welchem Thema?
3. **Klebt** am Ende die Kartenpaare ins Heft.

Eine Zahl ist durch 2 teilbar, wenn ...	Eine Zahl ist durch 3 teilbar, wenn ...	Eine Zahl ist durch 4 teilbar, wenn ...
... ihre Endziffer 0 oder 5 lautet.	... ihre Endziffer 0 lautet.	... ihre letzten beiden Ziffern eine Zahl ergeben, die durch 4 teilbar ist.
... ihre Endziffer 0, 2, 4, 6 oder 8 lautet.	... ihre Quersumme durch 3 teilbar ist.	... ihre Quersumme durch 9 teilbar ist.
Eine Zahl ist durch 5 teilbar, wenn ...	Eine Zahl ist durch 9 teilbar, wenn ...	Eine Zahl ist durch 10 teilbar, wenn ...

M 5



Tandembogen – Verstehst du die Teilbarkeitsregeln?

So geht's

1. **Bearbeitet** das folgende Arbeitsblatt zu zweit.
Faltet das Arbeitsblatt dazu entlang der Mittellinie.
 Person B **beginnt, liest** den Satz und **vervollständigt** diesen.
 Person A **kontrolliert** das Ergebnis (grau) auf ihrer Seite.
 Dann **vervollständigt** Person A den Satz usw.
Helft euch gegenseitig.

Person A	Person B
... ihre Endziffer 5 lautet.	Die Zahl 34525 ist durch 5 teilbar, weil ...
Die Zahl 4250 ist durch 10 teilbar, weil ...	... ihre Endziffer 0 lautet.
... ihre Quersumme 17 beträgt und diese nicht durch 3 teilbar ist.	Die Zahl 1452131 ist nicht durch 3 teilbar, weil ...
Die Zahl 3414141 ist durch 3 teilbar, weil ...	... ihre Quersumme 18 beträgt und diese durch 3 teilbar ist.
... ihre Endziffer 0, 2, 4, 6 oder 8 lautet.	Eine Zahl ist durch 2 teilbar, wenn ...
Eine Zahl ist durch 9 teilbar, wenn ...	... ihre Quersumme durch 9 teilbar ist.
... ihre letzten beiden Ziffern eine Zahl ergeben, die durch 4 teilbar ist.	Eine Zahl ist durch 4 teilbar, wenn ...
Die Zahl 5249023 ist nicht durch 5 teilbar, weil ...	... ihre Endziffer weder 0 noch 5 lautet.
... ihre Endziffer 0 lautet.	Die Zahl 1922350 ist durch 10 teilbar, weil ...
Die Zahl 33692 ist nicht durch 9 teilbar, weil ...	... ihre Quersumme 23 beträgt und diese nicht durch 9 teilbar ist.
... ihre letzten beiden Ziffern die Zahl 12 darstellen und 12 durch 4 teilbar ist.	Die Zahl 33612 ist durch 4 teilbar, weil ...
Die Zahl 336920 ist durch 5 teilbar, weil ...	... ihre Endziffer 0 lautet.

Grafik: Julia Lenzmann

Zahlen unter der Lupe I – Endziffernregel anwenden

M 6



So geht's

Löse die folgenden Aufgaben in Einzelarbeit.

Übe die Endziffernregel alternativ oder zusätzlich auch mithilfe der LearningApp

<https://learningapps.org/watch?v=pjcc91o5v23>.



Aufgabe 1

a) **Markiere** die Zahlen, die durch 2 teilbar sind:

3141, 290, 185, 9827, 49012, 900, 9877

b) **Markiere** die Zahlen, die durch 5 teilbar sind:

3441, 290, 186, 9221, 49012, 325, 3970

Aufgabe 2

a) Ist folgende Zahl durch 4 teilbar? **Begründe** deine Entscheidung.

3 141 324 230 → _____, weil _____

b) Ist folgende Zahl durch 2 teilbar? **Begründe** deine Entscheidung.

3 888 990 532 → _____, weil _____

c) Ist folgende Zahl durch 10 teilbar? **Begründe** deine Entscheidung.

4 142 142 147 → _____, weil _____

Aufgabe 3

Prüfe die Teilbarkeit und **kreuze an**, wenn sie durch die angegebene Zahl teilbar ist.

	7454	980	2032	19 095
teilbar durch 2	☐	☐	☐	☐
teilbar durch 5	☐	☐	☐	☐
teilbar durch 10	☐	☐	☐	☐

Aufgabe 4

a) **Gib** die nächstgrößere natürliche Zahl **an**, die durch 2 teilbar ist.

4 568 789 → _____ 1 917 313 → _____

b) **Gib** die nächstgrößere natürliche Zahl **an**, die durch 5 und durch 4 teilbar ist.

1 456 544 → _____ 917 317 → _____

1 989 267 → _____ 335 999 → _____

Gemeinsam sind wir stark – Die Primfaktorzerlegung von natürlichen Zahlen bestimmen

M 8a



So geht's

1. **Löse** deine Aufgaben.
2. **Suche** dir eine Person, die das Aufgabenblatt B bearbeitet hat.
3. **Vergleiche** eure Ergebnisse und klärt aufkommende Fragen.
Bei den Aufgaben ist teilweise deine Lösung die Aufgabe der Person B und umgekehrt.



Grafik: Julia Lenzmann

Person A

Aufgabe 1

Bestimme jeweils die Primfaktorzerlegung. **Gehe** dabei schrittweise vor.

a) $20 =$ _____ b) $28 =$ _____ c) $45 =$ _____

$=$ _____ $=$ _____ $=$ _____

d) $60 =$ _____ e) $100 =$ _____ f) $90 =$ _____

$=$ _____ $=$ _____ $=$ _____

$=$ _____ $=$ _____ $=$ _____

Aufgabe 2

Die Primfaktorzerlegung welcher Zahl wird hier dargestellt? **Ergänze.**

a) _____ $= 2 \cdot 15$ b) _____ $= 2 \cdot 49$ c) _____ $= 10 \cdot 5$

$= 2 \cdot 3 \cdot 5$ $= 2 \cdot 7 \cdot 7$ $= 2 \cdot 5 \cdot 5$

d) _____ $= 2 \cdot 70$ e) _____ $= 2 \cdot 12$ f) _____ $= 2 \cdot 63$

$= 2 \cdot 2 \cdot 35$ $= 2 \cdot 2 \cdot 6$ $= 2 \cdot 7 \cdot 9$

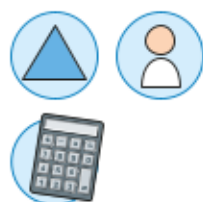
$= 2 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 7$ $= 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3$ $= 2 \cdot 7 \cdot 3 \cdot 3$

Aufgabe 3

Bestimme die Primfaktorzerlegung! Schreibe den Rechenweg auf ein Extra-Blatt.

a) 315 b) 142 c) 91 d) 240 e) 500

M 10



Gemischte Übungen – Differenzierte Aufgabenfelder

So geht's

1. **Wähle** eine der drei Niveaustufen und löse die Aufgaben.
2. **Vergleiche** deinen Rechenweg mit dem Lösungsblatt.

Aufgabe 1

- a) **Bestimme** die Vielfachenmenge mit 10 Zahlen.

$$V_{15} = \underline{\hspace{10cm}}$$

- b) **Bestimme** jeweils die Teilermenge.

$$T_{15} = \underline{\hspace{10cm}} \quad T_{18} = \underline{\hspace{10cm}}$$

- c) **Bestimme** jeweils die Primfaktorzerlegung!

$$36 = \underline{\hspace{10cm}} \quad 50 = \underline{\hspace{10cm}} \quad 48 = \underline{\hspace{10cm}}$$

Aufgabe 2

- a) **Bestimme** die Vielfachenmenge mit 10 Zahlen.

$$V_{37} = \underline{\hspace{10cm}}$$

- b) **Bestimme** jeweils die Teilermenge.

$$T_{65} = \underline{\hspace{10cm}} \quad T_{100} = \underline{\hspace{10cm}}$$

- c) **Bestimme** jeweils die Primfaktorzerlegung.

$$96 = \underline{\hspace{10cm}} \quad 80 = \underline{\hspace{10cm}} \quad 325 = \underline{\hspace{10cm}}$$

Aufgabe 3

- a) **Bestimme** die Vielfachenmenge mit 10 Zahlen.

$$V_{67} = \underline{\hspace{10cm}}$$

- b) **Bestimme** jeweils die Teilermenge.

$$T_{156} = \underline{\hspace{10cm}} \quad T_{190} = \underline{\hspace{10cm}}$$

- c) **Bestimme** jeweils die Primfaktorzerlegung.

$$256 = \underline{\hspace{10cm}} \quad 324 = \underline{\hspace{10cm}} \quad 600 = \underline{\hspace{10cm}}$$

Fit für den Test – Übungen zum gesamten Themenbereich

M 11



So geht's

1. **Löse** die Aufgaben und **vergleiche** deinen Rechenweg mit dem Lösungsblatt.
2. **Bewerte** dich selbst anhand des Bewertungsbogens.

Aufgabe 1 (3 Punkte)

Bestimme jeweils die Teilermenge.

a) $T_{85} =$ _____

b) $T_{72} =$ _____

c) $T_{66} =$ _____

Aufgabe 2 (1,5 Punkte)

Finde jeweils die Fehler und **korrigiere** sie.

$V_{32} = \{32, 64, 96, 128, 150, 191, 223, 256, \dots\}$

Aufgabe 3 (6 Punkte)

Prüfe die Teilbarkeit und **kreuze an**, wenn sie durch die angegebene Zahl teilbar ist.

	31 401 420	130 405	11 102 034	99 999
teilbar durch 2	☐	☐	☐	☐
teilbar durch 3	☐	☐	☐	☐
teilbar durch 5	☐	☐	☐	☐

Aufgabe 4 (4,5 Punkte)

Bestimme jeweils die Primfaktorzerlegung. Gehe dabei schrittweise vor.

a) $44 =$ _____ b) $42 =$ _____ c) $66 =$ _____

$=$ _____ $=$ _____ $=$ _____

d) $196 =$ _____ e) $120 =$ _____ f) $225 =$ _____

$=$ _____ $=$ _____ $=$ _____

$=$ _____ $=$ _____ $=$ _____